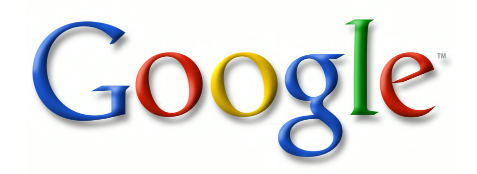




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Lehrbuch

der

theoretischen Mechanik

von

Dr. Carl Holtzmann,

Professor der Mechanik und der Physik an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1861.

Alexander Ziwet

Prof. A. Ziwet
gt.
12-21-1922

Inhalt.

Erstes Buch.

Zweites Buch.

Drittes Buch.

Viertes Buch.

Einleitung.

1. Den Ort eines Punktes bestimmt die Geometrie, indem sie seine Lage gegen andere Punkte, Linien oder Flächen angibt. Aendert ein Punkt seinen Ort, also seine Lage gegen die betrachteten anderen Punkte, Linien oder Flächen, so sagt man jener Punkt sei in Bewegung gegen diese Punkte, Linien oder Flächen; ändert er aber seine Lage nicht gegen diese, so sagt man er sey in Ruhe gegen diese. Diese Bewegung und Ruhe ist also immer eine relative, d. h. eine, welche sich bezieht auf die Lage anderer Punkte. Absolut in Ruhe wäre ein Punkt, welcher seinen Ort im Raume überhaupt nicht ändert; wir haben aber keine Mittel zu untersuchen, ob das bei einem Punkte der Fall ist, und alle Punkte, welche uns erscheinen, müssen wir auf die Lage bestimmter Punkte beziehen, von denen wir nicht behaupten können, dass sie ihren absoluten Ort nicht ändern, also jene Punkte relativ gegen diese betrachten.

2. Bei der Bewegung eines Körpers kann jeder Punkt eine von den Bewegungen anderer Punkte des Körpers verschiedene Bewegung haben; man wird daher als das einfachste zuerst die Bewegung eines einzelnen Punktes betrachten. Bewegen sich etwa alle Punkte eines Körpers ganz in der gleichen Weise, so wird die Kenntniss der Bewegung des einzelnen Punktes zugleich die Kenntniss der Bewegung des Körpers in sich schliessen; so kennt man z. B. die Bewegung eines fallenden Körpers, welcher sich nicht dreht, vollständig, wenn man die Bewegung eines seiner Punkte kennt.

3. Die Bewegung eines Punktes heisst geradlinig, wenn der Punkt eine gerade Linie durchlauft.

4. Die Bewegung eines Punktes heisst **gleichförmig**, wenn der bewegte Punkt in beliebig gewählten gleich grossen Zeiten gleich weit kommt.

5. Die Erfahrung lehrt, dass ein bewegter Punkt, so lange nicht äussere Ursachen auf ihn einwirken, sich geradlinig und gleichförmig fortbewegt. Diess ist das sogenannte **Trägheitsgesetz**. So oft wir sehen, dass die Bewegung eines Punktes nicht gleichförmig, oder nicht geradlinig ist, oder beides zugleich nicht, so müssen wir annehmen, dass eine äussere Ursache da ist, welche den bewegten Punkt veranlasst, sei es die Geschwindigkeit zu ändern, oder die Richtung oder beides.

Diese äussere Ursache nennen wir eine **Kraft**.

6. Die Wirkung einer Kraft besteht also entweder in der Aenderung einer Geschwindigkeit, oder in der Aenderung der Richtung einer Bewegung; es wird aber auch der Fall vorkommen, dass mehrere äussere Ursachen, Kräfte, zugleich einen Punkt bewegen wollen, und hier kann nun die Wirkung einer Kraft auch darin bestehen, dass durch sie die Wirkung einer andern Kraft aufgehoben wird. Heben sich die Wirkungen der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, gegenseitig auf, so wird dieser Punkt sich bewegen als ob gar keine Kräfte auf ihn einwirken, also geradlinig und gleichförmig, worin als besonderer Fall die Ruhe mitbegriffen ist.

7. Sehen wir Kräfte an einem Körper die ohne sie bestehende Bewegung nicht ändern, so sagen wir, sie seien an diesem Körper im **Gleichgewichte**.

8. Die Lehre von der Bewegung heisst **Mechanik**. Sie hat zwei Aufgaben zu lösen, nämlich erstlich die Beschreibung der stattfindenden Bewegung zu geben, und zweitens den Zusammenhang zwischen der Ursache der Bewegung, der Kraft, und der Bewegung festzustellen. Man unterscheidet wohl die beiden Theile der Mechanik, welche diesen Aufgaben entsprechen, in der **Phoronomie** und **Dynamik**. Sieht man z. B. einen Punkt in einem Kreise sich bewegen, und hat man dabei erkannt, dass dieser Punkt in gleichen Zeiten gleich weit kommt, dass er in jeder Secunde 3 Fuss weit kommt, und dass der durchlaufene Kreis einen Fuss Halbmesser hat, so ist durch diese Beschreibung der Bewegung die Aufgabe der

Phoronomie vollständig gelöst. Fragt man aber nach der Kraft, welche diesem Punkte diese Bewegung ertheilt, so ist diese Frage zu beantworten Aufgabe der Dynamik, welche antwortet, der Punkt wird in jedem Augenblicke durch eine an Grösse sich gleichbleibende Kraft nach dem Mittelpunkte des Kreises hingezogen oder gedrückt, deren Grösse die Dynamik noch weiter bestimmt.

Von der Dynamik trennt man noch den besondern Theil ab, in welchem die Kräftewirkungen sich gegenseitig aufheben, also die Kräfte im Gleichgewichte sind, als die Lehre vom Gleichgewichte, welcher man den Namen Statik gegeben hat.

Gleichförmige geradlinige Bewegung.

9. Die gleichförmige und geradlinige Bewegung eines Punktes ist vollständig bekannt, wenn man die Richtung der Bewegung kennt, und den Abstand, welchen der bewegte Punkt zu zwei gegebenen Zeiten in dieser Richtung von einem gegebenen Fixpunkte aus erreicht hat. Ist z. B. gegeben, dass der Punkt sich in der geraden Linie AB bewegt, und dass er zur Zeit t_0 den Abstand s_0 von A gegen B gemessen erreicht hat, und zur Zeit t_1 den Abstand s_1, so weiss man, dass er in der Zeit $t_1 - t_0$ den Weg $s_1 - s_0$ durchlaufen hat, also in jeder Zeiteinheit den Weg

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0},$$

wofür ich c setze, durchlauft. Zur Zeit t ist daher sein Abstand von A $= s_0 + ct.$

10. Unter der Geschwindigkeit versteht man bei der gleichförmigen Bewegung, den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg; bei der vorstehend betrachteten Bewegung ist daher die Geschwindigkeit

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = c.$$

Der bewegte Punkt geht dabei in der Richtung von AB, nach welcher die positiven Abstände gemessen werden, wenn die Geschwindigkeit positiv ist, dagegen in der Richtung BA, wenn die Geschwindigkeit negativ ist.

11. Ist die Geschwindigkeit gegeben, mit welcher sich ein Körper von A nach B hin gleichförmig bewegt, gleich c, so weiss

man, dass er in einer Zeiteinheit durch den Weg c, in t Zeiteinheiten durch ct kommt; um nun zu wissen, wo sich der Körper, Punkt, zur Zeit t befindet, muss noch gegeben sein, wo er sich zu irgend einer Zeit in der Linie AB befindet. Weiss man, dass er zur Zeit t_0 in dem Abstande s_0 von A gegen B war, so hat man seinen Abstand von A zur Zeit t

$$s = s_0 + c(t - t_0).$$

Ist s_0 der Abstand, welchen der Punkt in dem Augenblicke hatte, von welchem man anfing die Zeit zu zählen, also für $t = o$, so ist

$$s = s_0 + ct.$$

s_0 heisst dann der anfängliche Abstand.

Erstes Buch.

Kräfte an einem Punkte.

Statik der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

12. Hier ist zuerst festzustellen, was zur Kenntniss einer Kraft nothwendig ist.

Eine Kraft, welche auf einen in Ruhe befindlichen Punkt wirkt, wird diesen, wenn andere äussere Ursachen nicht vorhanden sind, in Bewegung setzen, und der angegriffene Punkt wird sich nach einer bestimmten Richtung fortbewegen. Die Richtung, in welcher der Punkt anfängt sich zu bewegen, nennen wir die Richtung der Kraft.

13. Lässt man zwei Kräfte von entgegengesetzter Richtung zugleich auf einen Punkt wirken, so wird der Punkt in einer der beiden Richtungen fortgehen, und wir nennen diejenige Kraft die grössere, welcher der Punkt folgt. Es werden aber die Kräfte auch so gewählt werden können, dass der Punkt weder der einen noch der andern dieser Kräfte folgt, sondern in dem Ruhezustande bleibt, in welchem er vor dem Angriffe beider Kräfte war; dann sind diese Kräfte im Gleichgewichte und man nennt sie gleich gross.

Lässt man zwei gleich grosse Kräfte nach derselben Seite und Richtung hin auf einen Punkt wirken, nach der entgegengesetzten aber eine einzige Kraft, welche mit jenen beiden im Gleichgewichte ist, so ist diese Kraft zweimal so gross als eine von den ersten. Auf gleiche Weise kann man die drei-, vierfache etc. Kraft

bestimmen, die Kräfte unter sich ihrer Grösse nach vergleichen, messen.

Dieses Messen der Kraft genügt für die Untersuchung des Gleichgewichtes, für die Statik.

14. Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, dass man zwei nach einer Richtung wirkende Kräfte durch eine Kraft ersetzen kann, deren Grösse gleich der Summe jener Kräfte ist.

15. Eine Kraft, welche mehrere andere ersetzen kann, heisst die Resultirende dieser. Die einzelnen Kräfte heissen die Componenten der Resultirenden.

16. Die Resultirende zweier direct einander entgegenwirkender Kräfte ist die Differenz dieser Kräfte; sie hat die Richtung der grösseren Kraft.

Um diesen Satz mit dem in (Nr. 14) ausgesprochenen in einen Satz zusammenfassen zu können, und um unabhängig zu sein von der Frage, welches die grössere Kraft ist, nimmt man von zwei direct entgegengesetzten Kräften die eine als positiv, die andere als negativ. Dann ist ihre Resultirende die algebraische Summe beider; sie liegt in der Richtung der positiven oder der negativen Kraft, je nachdem diese Summe positiv oder negativ wird.

Die Resultirende mehrerer Kräfte, welche an einem Punkte wirken, und deren Richtungen in eine gerade Linie fallen, ist die algebraische Summe dieser Kräfte, wenn man die nach einer Richtung wirkenden Kräfte als positive, die nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden als negative Kräfte in Rechnung bringt. Die Resultirende geht nach der ersten oder der zweiten Richtung, je nachdem die algebraische Summe der Componenten positiv oder negativ ist.

17. Wirken zwei Kräfte P und Q nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt m, so wird dieser eine Bewegung annehmen, welche in der Ebene P, Q liegt, weil der Grund für das Austreten aus dieser Ebene nach einer Seite hin ebenso für die andere Seite der Ebene P, Q vorhanden wäre.

Lässt man auf den Punkt m eine Kraft nach der Richtung der eintretenden Bewegung wirken, so wird diese bei geeigneter Grösse

dieselbe Bewegung für sich allein dem m mittheilen, welche unter der Einwirkung jener beiden Kräfte P und Q eintritt. Diese Kräfte lassen sich also durch eine einzige ersetzen, von der wir wissen, dass sie in der Ebene der beiden Kräfte P, Q liegt.

18. Lässt man in der Richtung von P ein zweites P und in der Richtung von Q ein zweites Q wirken, so wird man das erste P und Q durch eine Resultirende R ersetzen können, und ebenso das zweite Paar P und Q. Die beiden Resultirenden R werden in dieselbe Richtung fallen und also für sich eine Resultirende 2 R geben. Nimmt man also statt der Kräfte P und Q die doppelten 2P und 2Q, so behält die Resultirende noch dieselbe Lage und wird doppelt so gross als die Resultirende der einfachen P und Q.

Ebenso geben nP und nQ die Resultirende nR in derselben Richtung wie R, oder wachsen die beiden Componenten in demselben Verhältnisse, so behält die Resultirende ihre Richtung und wächst in demselben Verhältnisse.

Die Richtung der Resultirenden R oder der Winkel (R, P) bleibt also derselbe so lange das Verhältniss der Kräfte

$$\frac{P}{Q} = a$$

dasselbe bleibt, und R ist dann proportional mit P und mit Q oder

$$R = kP = kaQ,$$

wo k eine Constante ist. Diese wird aber einen andern Werth annehmen, wenn das Verhältniss a der beiden Kräfte ein anderes wird, wo zugleich der Winkel (R, P) ein anderer wird.

19. Sind P und Q zwei aufeinander rechtwinkliche Kräfte, welche an einem Punkte m wirken, und ist

$$\frac{P}{Q} = a$$

dasselbe, so wird die Resultirende

$$R = kP; \; R = kaQ$$

wo k eine Constante ist, welche von a abhängt, und der Winkel (R, P) ist ebenso constant. Aendert sich aber das Verhältniss a, so wird sich auch k ändern und ebenso der Winkel (R, P).

Denkt man sich nun wieder P als die Resultirende zweier auf

einander rechtwinklicher Kräfte S und T, von welchen die erste in die Richtung von R fällt, also mit P den Winkel (R,P) bildet, so wird auch

$$\frac{S}{T} = a$$

sein müssen, und $$P = kS = kaT.$$

Zerlegt man ebenso Q in zwei Kräfte V und W, von welchen die erste in die Richtung von R fällt und die zweite dazu rechtwinklich und T direct entgegen ist, so hat man wieder, weil die letzte mit R den Winkel (R,P) bildet,

$$\frac{W}{V} = a$$

und $$Q = kW = kaV.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$W = \frac{Q}{k} = \frac{R}{k^2 a},$$

$$T = \frac{P}{ka} = \frac{R}{k^2 a}, \text{ also}$$

$$W = T.$$

Da aber W und T rechtwinklich zu R stehen und einander entgegengesetzt sind, so heben sie sich gegenseitig auf, und für die zwei Kräfte P und Q bleiben nur die beiden S und V übrig, welche beide in der Richtung von R liegen. Die Resultirende von P und Q ist daher

$$\begin{aligned} R &= S + V \\ &= \frac{P}{k} + \frac{Q}{ka} \\ &= \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} \text{ oder} \end{aligned}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass R die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks ist, dessen Catheten P und Q sind. Man hat, wenn man den Winkel dieses Dreiecks zwischen R und P mit φ bezeichnet,

$$R = \frac{P}{\cos\varphi} \text{ und } \frac{P}{Q} = \cot\varphi$$

oder $$k = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi \text{ und } a = \cot\varphi \text{ oder } ak = \frac{1}{\sin\varphi} = \operatorname{cosec}\varphi.$$

k hat nach der vorhergehenden Nummer denselben Werth, so lange das Verhältniss $\frac{P}{Q} = a$ dasselbe bleibt, oder so lange der Winkel (R,P) derselbe bleibt. Aendert sich das Verhältniss a, so wird damit auch der Winkel (R,P) ein anderer werden, und man kann daher auch k als eine Funktion von (R,P) betrachten. Dann aber wird man ka, das Verhältniss von R und Q, als dieselbe Funktion des Winkels (R,Q) haben, oder weil (P,Q) ein rechter Winkel ist, wird ka die Funktion von $\frac{\pi}{2} - (R,P)$ sein, welche k von (R,P) selbst ist. Daraus folgt im Vergleiche mit den beiden obigen Werthen von k und ka, dass

$$(R,P) = \varphi$$

ist. Wäre diess nicht der Fall, sondern $(R,P) = \varphi + \alpha$, so hätte man

$$k = f_{\varphi+\alpha} = \sec\varphi$$

und

$$ak = f_{\frac{\pi}{2}-(\varphi+\alpha)} = \operatorname{cosec}\varphi.$$

Diess ist nur der Fall für $\alpha = 0$.

Beschreibt man also über P und Q, indem man die Grössen dieser Kräfte auf ihre Richtungen als Längen aufträgt, ein Rechteck, so ist die Hypotenuse die Resultirende von P und Q nach Grösse und Richtung.

20. Man hat demnach, wenn P und Q zwei aufeinander rechtwinkliche Kräfte an demselben Punkte sind, und R ihre Resultirende

$$R^2 = P^2 + Q^2,$$

$$P = R\cos(R,P); \quad Q = R\sin(R,P) = R\cos(R,Q), \quad \operatorname{tg}(R,P) = \frac{Q}{P}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Grösse der Resultirenden und ihre Lage.

Man sagt, wenn man die Resultirende bestimmt hat, man habe die Kräfte P und Q zu einer zusammen gesetzt.

Umgekehrt kann man auch eine gegebene Kraft R als die Resultirende zweier auf einander rechtwinklicher Kräfte betrachten, und diese bestimmen. Hier ist eine von den Grössen P, Q und dem Winkel (R,P) willkührlich, und kann also ebenfalls gegeben sein; die beiden anderen bestimmen sich dann aus obigen Gleichun-

gen. Man sagt hier, man habe R in die beiden Kräfte P und Q zerlegt.

21. Greifen zwei schief gegen einander gerichtete Kräfte P und Q einen Punkt m an, so kann man nach dem Vorhergehenden zuerst eine der beiden Kräfte, z. B. P, in zwei rechtwinkliche Kräfte zerlegen, von welchen die eine in die Richtung von Q fällt. Man erhält so in der Richtung von Q die Kräfte

$$Q \text{ und } P\cos(P, Q),$$

welche sich zu einer Kraft $Q + P\cos(P, Q)$ zusammensetzen, und in der Richtung rechtwinklich zu Q die Kraft

$$P\sin(P, Q).$$

Setzt man nun die beiden auf einander rechtwinklichen Kräfte

$$Q + P\cos(P, Q) \text{ und } P\sin(P, Q)$$

zusammen, so erhält man, wenn man die geometrische Construction wählt, wie man leicht sieht, für die Resultirende der Grösse und Richtung nach die Diagonale des Parallelogramms, dessen in den Richtungen von P und Q liegende Seiten P und Q Längeneinheiten haben. Dieses Parallelogramm nennt man daher das Kräfteparallelogramm.

Durch Rechnung findet man

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q)$$

$$\frac{P}{R} = \frac{\sin(R, Q)}{\sin(P, Q)}; \quad \frac{Q}{R} = \frac{\sin(R, P)}{\sin(P, Q)}.$$

22. Soll eine Kraft R in zwei andere zerlegt werden, so ist diese Aufgabe gleichbedeutend mit der, ein Parallelogramm zu construiren, dessen Diagonale gegeben ist. Man kann also hier noch die Stücke geben, welche das Parallelogramm oder das Dreieck bestimmen, dessen eine Seite R gegeben ist. Die Trigonometrie zeigt, wie die Componenten, welche hier die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind, und die Winkel zwischen ihnen und der Resultirenden berechnet werden.

23. Sollen die Kräfte P, Q, S, welche an einem Punkte wirken, zu einer Resultirenden zusammengesetzt werden, so setzt man zuerst nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zwei dieser Kräfte zusammen, und die Resultirende von diesen dann mit der

dritten. Liegen die Kräfte nicht in einer Ebene, so erhält man durch die geometrische Construction dieser Zusammensetzung die Diagonale des Parallelepipeds, das P, Q, S zu Seiten hat; diese Diagonale gibt die Resultirende nach Grösse und Richtung an.

24. Sind die Kräfte P, Q, S rechtwinklich auf einander und ist R ihre Resultirende, so ist

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2$$

und

$$P = R\cos(R,P);\quad Q = R\cos(R,Q);\quad S = R\cos(S,R).$$

Diese Gleichungen bestimmen die Grösse und Richtung der Resultirenden, oder umgekehrt die Componenten P, Q, S einer Kraft nach drei aufeinander rechtwinklichen Richtungen.

25. Spricht man von der Componenten einer Kraft nach einer Richtung x, so setzt man dabei immer voraus, dass die andere Componente in der Ebene der Kraft und der Richtung x liege und auf x rechtwinklich sei.

Danach ist die Componente der Kraft R nach der Richtung x gleich

$$R\cos(R,x).$$

Die Kraft R bleibt hierbei immer ohne Zeichen, der Winkel (R,x) ist aber der, welchen die in der Richtung von x gezogene Linie mit der Richtung der Kraft R bildet. Dieser Winkel liegt also zwischen 0^0 und 180^0. Ist (R,x) ein spitzer Winkel, so ist der Cosinus desselben positiv und also die Componente auch positiv; ist dagegen der Winkel (R,x) ein stumpfer, so wird die Componente negativ. Im ersten Falle liegt die Componente in der Richtung von x, im zweiten diesem entgegen.

26. Sollen beliebig viele Kräfte, welche an einem Punkte wirken, zusammengesetzt werden, so kann diess dadurch geschehen, dass man erst zwei zusammensetzt; dann ihre Resultirende mit der dritten Kraft u. s. f., bis man zur Resultirenden aller Kräfte kommt.

Rechnend verfährt man gewöhnlich anders. Man zerlegt nach der vorstehenden Nummer alle Kräfte nach drei aufeinander rechtwinklichen, übrigens aber beliebigen Richtungen; setzt dann alle Componenten in derselben Richtung zu einer Kraft zusammen, wodurch man drei Kräfte erhält, die X, Y, Z heissen mögen, welche nach den Richtungen x, y, z gehen, wenn sie positiv sind, diesen

entgegen, wenn sie negativ sind. Die Resultirende dieser drei Kräfte ist dann die Resultirende aller Kräfte.

Ist P eine der gegebenen Kräfte, so sind ihre Componenten nach x, y, z

$$P \cos (P,x); \; P \cos (P,y); \; P \cos (P,z),$$

also

$$X = \Sigma P \cos (P,x); \; Y = \Sigma P \cos (P,y); \; Z = \Sigma P \cos (P,z),$$

wo unter $\Sigma P \cos (P,x)$ die Summe der Componenten aller Kräfte nach der Richtung x verstanden ist, und die beiden andern Summen sich ebenso auf die Richtungen y und z beziehen.

Die Resultirende und ihre Richtung ergibt sich nun aus

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und
$$\cos (R,x) = \frac{X}{R}; \; \cos (R,y) = \frac{Y}{R}; \; \cos (R,z) = \frac{Z}{R}.$$

Die Winkel sind zwischen 0 und 180° zu nehmen, und sind also spitz oder stumpf, je nachdem X, Y, Z positiv oder negativ sind; R hat kein Zeichen oder ist als positiv in Rechnung zu nehmen.

27. Sind die Kräfte im Gleichgewichte, so muss ihre Resultirende Null werden, oder es muss

$$0 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

sein, was nur sein kann, wenn

$$X = 0; \; Y = 0; \; Z = 0$$

wird.

Sollen also Kräfte um einen Punkt im Gleichgewichte sein, so müssen die Summen ihrer Componenten nach drei auf einander rechtwinklichen Richtungen einzeln gleich Null sein.

28. Sezt man Kräfte P, P_1, P_2, welche an einem Punkte im Gleichgewichte sind, alle bis auf eine, z. B. P, zusammen, so erhält man statt aller Kräfte zwei, P und die Resultirende aller übrigen; welche R heissen mag. Da alle Kräfte im Gleichgewichte sind, so müssen auch P und R im Gleichgewichte sein. Zwei Kräfte können aber an einem Punkte nur dann im Gleichgewichte sein, wenn sie gleich und direct entgegengesetzt sind, weil man in jedem andern Falle durch das Kräfteparallelogramm oder nach dem Satze in (Nr. 21) eine Resultirende für diese beiden Kräfte erhält.

Bei Kräften, welche an einem Punkte im Gleichgewichte sind, ist daher jede Kraft gleich und direct entgegengesetzt der Resultirenden aller andern, die Gegenresultirende aller andern Kräfte.

29. Sind die Kräfte P, P_1, P_2 ..... an dem Punkte m im Gleichgewichte, sind x, y, z drei beliebige aber aufeinander rechtwinkliche Richtungen, so ist nach dem Obigen

$$\Sigma P \cos(P,x) = 0; \quad \Sigma P \cos(P,y) = 0; \quad \Sigma P \cos(P,z) = 0,$$

wenn die Summen auf alle Kräfte ausgedehnt werden.

Hat nun der Angriffspunkt m einen geradlinigen Weg von der Länge s durchlaufen, welcher mit den Richtungen x, y, z, die Winkel (s,x), (s,y), (s,z) bildet, und multiplicirt man obige Gleichungen der Reihe nach mit

$$s \cos(s,x); \quad s \cos(s,y); \quad s \cos(s,z)$$

und addirt dann alle drei Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\Sigma P s [\cos(P,x)\cos(s,x) + \cos(P,y)\cos(s,y) + \cos(P,z)\cos(s,z)] = 0$$

oder

$$\Sigma P s \cos(P,s) = 0.$$

$s \cos(P,s)$ ist die Projection des Weges des Angriffspunktes m auf die Richtung der Kraft P; diese Projection nennt man den Weg der Kraft bei dieser Verschiebung s des Angriffspunktes. Die obige Summe enthält die Producte aus jeder einzelnen Kraft in die Projection des Weges des Angriffspunktes auf diese Kraft oder die Producte aus jeder Kraft in ihren Weg. Das Product einer Kraft in ihren Weg nennt man in der Mechanik die Arbeit der Kraft während dieser Bewegung, und mit dieser Benennung lässt sich obiger Satz so aussprechen:

Sind Kräfte an einem Punkte im Gleichgewichte, so ist die Summe ihrer Arbeiten für jede beliebige geradlinige Verschiebung des Angriffspunktes gleich Null.

30. Die Arbeit einer Kraft P bei der Verschiebung s des Angriffspunktes ist nach der obigen Definition

$$P s \cos(P,s).$$

Sie ist am grössten, wenn $(P,s) = 0$ ist, wo die Verschiebung des Angriffspunktes in die Richtung der Kraft selbst fällt. Der Weg der Kraft ist hier s selbst.

Steht s rechtwinklich auf der Richtung der Kraft, so ist

$\cos (P, s) = 0$ und damit der Weg der Kraft und ihre Arbeit gleich Null; sie nähert bei dieser Bewegung den angegriffenen Punkt ihrem Ziele nicht.

Bildet s einen stumpfen Winkel mit P, so wird der Weg der Kraft negativ und die Arbeit ebenso negativ.

Positiv ist die Arbeit immer, wenn die Projection der Verschiebung des Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft mit dieser in einerlei Richtung vom Angriffspunkte fällt, andernfalls ist die Arbeit negativ.

Der gewöhnliche Sprachgebrauch nennt die Erhebung eines Gewichtes auf eine Höhe eine geleistete Arbeit; diess ist für uns eine negative Arbeit. Sinkt dagegen etwa das Gewicht einer Uhr durch eine Höhe herunter, so wird der gewöhnliche Sprachgebrauch hier von einem Kraftaufwande reden, welcher zur Bewegung der Uhr verwendet wurde; für uns haben wir hier eine positive Arbeit.

31. Da man bei Kräften im Gleichgewichte immer eine Kraft als die Gegenresultirende aller andern betrachten kann, und die Arbeit dieser Kraft von entgegengesetztem Zeichen mit der Arbeit der Resultirenden der übrigen Kräfte ist, so ist die Arbeit der Resultirenden mehrerer Kräfte für jede beliebige Verschiebung des Angriffspunktes gleich der Summe der Arbeiten jeder einzelnen Kraft.

32. Ist die Summe der Arbeiten mehrerer an einem Punkte thätiger Kräfte für eine bestimmte Verschiebung des Angriffspunktes gleich Null, so sind entweder die Kräfte im Gleichgewichte, oder sie haben eine Resultirende, deren Richtung auf der Verschiebung rechtwinklich steht.

Ist die Summe der Arbeiten dieser Kräfte für zwei verschieden gerichtete Verschiebungen je gleich Null, so sind die Kräfte entweder im Gleichgewichte oder ihre Resultirende steht auf beiden Verschiebungen normal, also normal zur Ebene durch beide Verschiebungen.

Sind endlich die Summen der Arbeiten für drei nicht in einer Ebene liegende Verschiebungen des Angriffspunktes gleich Null, so sind die Kräfte im Gleichgewichte.

Es ist das ein anderer Ausdruck der oben schon aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen.

Geradlinige, veränderliche Bewegung. Phoronomie.

33. Zur Kenntniss der Bewegung ist erforderlich angeben zu können, wo sich der bewegte Punkt zu jeder Zeit befindet. Diess ist der Fall, wenn man die gerade Linie kennt, in welcher sich der Punkt bewegt, und seinen Abstand zu jeder Zeit von einem gegebenen Punkte in dieser Linie. Das letzte fordert, dass man diesen Abstand als Funktion der Zeit angeben könne.

34. Ist s der Abstand des bewegten Punktes von einem Fixpunkte seiner geradlinigen Bahn zur Zeit t; wächst dieser Abstand in der unendlich kleinen Zeit dt um ds, so ist der Weg des Punktes in dieser Zeit ds, und in der Zeiteinheit würde er, gleichförmig so bewegt, wie er sich in der unendlich kleinen Zeit dt bewegt, den Weg

$$\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

durchlaufen. Diese Grösse nennt man die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t. Sie ist positiv, wenn sich der Punkt in der Richtung des wachsenden positiven Abstandes bewegt, negativ, wenn er sich in der Richtung der negativen s bewegt.

Ist z. B. gegeben

$$s = a + bt,$$

wo a und b constant sind, so ist die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = b$$

constant; die Bewegung ist eine gleichförmige.

Ist $$s = a + bt + ct^2,$$

so ist die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = b + 2ct.$$

Hier ist die Geschwindigkeit in jedem Zeitpunkte eine andere; die Bewegung ist eine veränderliche; und zwar nimmt die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit um gleich viel, um 2c zu. Eine

solche Bewegung nennt man eine gleichförmig beschleunigte, und die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit die Beschleunigung.

Ist
$$s = a \sin bt,$$
und dabei wieder a und b constant, so ist die Geschwindigkeit zur Zeit t
$$v = \frac{ds}{dt} = ab \cos bt.$$

Die Geschwindigkeit ist anfänglich, d. h. für $t = 0$ gleich ab und hat dabei ihren grössten Werth; sie wird mit der Zeit kleiner und wird für
$$bt = \frac{\pi}{2} \text{ also für } t = \frac{\pi}{2b}$$
gleich Null; man sieht aus der Gleichung für s, dass zu dieser Zeit der Abstand a geworden und damit seinen grössten Werth erreicht hat. Für die nächstfolgende Zeit wird $\cos bt$ und damit v negativ, d. h. der Punkt bewegt sich nicht mehr in der Richtung, in welcher s gemessen wird, sondern dieser entgegen gegen den Fixpunkt hin, von dem aus s gemessen wird. Dieser ist erreicht und $s = 0$, wenn
$$bt = \pi \text{ also bei } t = \frac{\pi}{b}.$$

Die Geschwindigkeit ist hier $-ab$ und das ist im Sinne der Analysis ihr kleinster Werth, d. h. der Punkt bewegt sich jetzt am schnellsten in der Richtnng der negativen s. Für
$$bt = \frac{3\pi}{2} \text{ oder } t = \frac{3\pi}{2b}$$
wird der Abstand gleich $-a$, und die Geschwindigkeit Null; der Punkt ist jetzt am weitesten nach der Seite der negativen s gekommen und seine bis dahin negative Geschwindigkeit geht nun wieder in eine positive über. Für
$$bt = 2\pi \text{ oder } t = \frac{2\pi}{b}$$
wird endlich wieder
$$s = a \text{ und } v = ab$$
und alles wiederholt sich nun wie es von $t = o$ an auf einander folgte. Dieses ist eine periodische Bewegung, eine Oscillation oder Schwingung um den Punkt $s = o$; a heisst die Weite oder Amplitude der Oscillation und $\frac{2\pi}{b}$ ist die Dauer einer Oscillation oder Doppelschwingung.

35. Ist die Geschwindigkeit v zur Zeit t als Funktion von t gefunden, so erhält man aus

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$s = \int v\,dt + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten muss der Abstand für irgend eine Zeit gegeben sein.

36. Gleichförmig beschleunigt heisst eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel wächst. Die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit heisst hierbei die Beschleunigung. Die Beschleunigung kann positiv oder negativ sein. Haben Geschwindigkeit und Beschleunigung dasselbe Zeichen, so wird die Bewegung allmählig eine schnellere; haben beide verschiedene Zeichen, so wird die Bewegung langsamer, sie ist verzögert.

Ist f die Beschleunigung, so nimmt die Geschwindigkeit in t Zeiteinheiten um $f.t$ zu; ist die Geschwindigkeit zur Zeit 0 gleich v_0, so ist sie zur Zeit t

$$v = v_0 + ft.$$

Ist s der Abstand des bewegten Punktes zur Zeit t von einem Fixpunkte in der Bahn, so ist

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + ft \text{ und}$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} ft^2 + a$$

wo a eine Constante ist.

Ist der Abstand s gleich s_0 in dem Augenblicke, von dem an die Zeit gezählt wird, so muss $s = s_0$ werden für $t = 0$; die obige Formel gibt damit

$$s_0 = a$$

und daher vollständig bestimmt

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} ft^2.$$

37. Geht der Punkt von der Ruhe aus und zählt man den Abstand von dem Ausgangspunkte an, so hat man sowohl $v_0 = 0$ als $s_0 = 0$ und dann ist

$$v = ft, \quad s = \tfrac{1}{2} ft^2. \tag{a}$$

Es ist also die Geschwindigkeit der Zeit proportional und der durchlaufene Weg dem Quadrate der Zeit. Der Weg in der Zeit 1 ist die halbe Beschleunigung, und am Ende der zweiten Zeiteinheit ist der durchlaufene Weg gleich der erlangten Geschwindigkeit.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen (a) die Beschleunigung, so erhält man das allen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gemeinschaftliche Gesetz

$$2s = vt. \tag{b}$$

Der vom Ruhepunkte an durchlaufene Weg ist die Hälfte des Wegs, welcher mit der am Ende erlangten Geschwindigkeit in derselben Zeit gleichförmig durchlaufen würde.

Oder auch: die mittlere Geschwindigkeit des beschleunigten Körpers ist die Hälfte der am Ende der Bewegung erlangten Geschwindigkeit.

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen (a) die Zeit t, so erhält man

$$v = \sqrt{2fs} \text{ oder } s = \frac{v^2}{2f}, \tag{c}$$

welche zeigen, wie der durchlaufene Weg und die erlangte Geschwindigkeit zusammenhängen.

38. Im Allgemeinen wird die Geschwindigkeit bei einer Bewegung in jedem Augenblicke mit verschiedener Schnelligkeit wachsen, also die Beschleunigung in jedem Augenblicke eine andere sein. Ist v die Geschwindigkeit zur Zeit t und wächst diese um dv in der unendlich kleinen Zeit dt, so würde die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um

$$\frac{dv}{dt}$$

wachsen, wenn sie während dieser Zeit gleichförmig wachsen würde, wie sie in der Zeit dt wächst. Diese Grösse nennt man die **Beschleunigung** zur Zeit t. Bezeichnet man diese Beschleunigung mit f, so ist

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{2}$$

wenn nämlich noch s der Abstand des bewegten Punktes zur Zeit t von einem Fixpunkte seiner Bahn ist.

Für das oben behandelte Beispiel einer oscillirenden Bewegung ist

$$s = a \sin bt \text{ und } v = ab \cos bt;$$

daraus ergibt sich die Beschleunigung

$$f = -ab^2 \sin bt = -b^2 s.$$

Die Beschleunigung ist also hier dem Abstande proportional, aber entgegengesetzt, d. h. negativ, wenn der Abstand positiv ist, und umgekehrt. Für den Anfangspunkt des Abstandes ist die Beschleunigung Null, d. h. die Geschwindigkeit ist hier nicht im Wachsen oder Abnehmen, sondern sie geht aus dem Einen ins Andere über, sie ist, wenn der bewegte Punkt diese Stelle erreicht hat, ein Maximum oder ein Minimum, nämlich $\pm ab$. So lange s positiv ist, ist die Beschleunigung negativ, d. h. die in der Richtung von s gehende Bewegung wird verzögert, dagegen beim Rückgang, wenn der Punkt dem s entgegen sich bewegt oder gegen die negativen s hin, wird die Geschwindigkeit grösser. In der grössten Ausschreitung des bewegten Punktes, wenn s gleich a geworden ist, ist die Beschleunigung, am grössten, die Geschwindigkeit ist auf Null heruntergebracht und wird nun vermöge der negativen Beschleunigung negativ.

39. Ist die Beschleunigung zur Zeit t gleich f, so ist

$$\frac{dv}{dt} = f$$

und daraus die Geschwindigkeit

$$v = \int f\,dt + \text{Const.}$$

Aus der Geschwindigkeit findet man den Abstand durch eine neue Integration nach t (Nr. 35), wobei eine zweite Constante beigefügt werden muss. Zur Bestimmung dieser beiden Constanten muss entweder die Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit und der Abstand zu einer bestimmten Zeit, oder es müssen die Abstände zu zwei verschiedenen Zeiten bekannt sein.

Ist z. B. gegeben $\qquad f = ae^{\alpha t}$

wo a und α constant und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so erhält man nach einander

$$v = \frac{a}{\alpha}e^{\alpha t} + c \text{ und } s = \frac{a}{\alpha^2}e^{\alpha t} + ct + d,$$

wo c und d Constanten sind. Ist noch gegeben, dass die Geschwindigkeit und dass der Abstand Null sein sollen für $t = 0$, so erhält

man
$$0 = \frac{a}{\alpha} + c \text{ und } 0 = \frac{a}{\alpha^2} + d,$$
woraus sich die vollständig bestimmten Lösungen der Bewegung ergeben,
$$v = \frac{a}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \text{ und } s = \frac{a}{\alpha^2}(e^{\alpha t} - \alpha t - 1).$$

40. Aus den Gleichungen
$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } f = \frac{dv}{dt}$$
erhält man
$$v\frac{dv}{dt} = f\frac{ds}{dt} \text{ oder } v\,dv = f\,ds, \tag{3}$$
welche Gleichungen dann zur Bestimmung der Bewegung geschickt sind, wenn die Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit oder als Funktion des Abstandes gegeben ist.

Ist z. B.
$$f = -a^2v^2,$$
wo a eine reelle Constante ist, so gibt obige Gleichung
$$v\,dv = -a^2v^2ds, \text{ woraus}$$
$$\frac{dv}{v} = -a^2ds \text{ und}$$
$$\ln v = -a^2s + c$$
folgt, wobei c eine Constante ist.

Ist die Geschwindigkeit v_0 für $s = 0$, so wird
$$\ln v_0 = c,$$
womit
$$\ln\frac{v_0}{v} = a^2s$$
wird. Hieraus sieht man, dass die Geschwindigkeit bei dieser Bewegung immer abnimmt, dass sie aber erst Null wird, wenn s unendlich gross geworden ist.

Aus vorstehender Gleichung ergibt sich
$$v = v_0\,e^{-a^2s},$$
was mit
$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$dt = \frac{1}{v_0}e^{a^2s}ds \text{ und durch Integration}$$
$$t = \frac{1}{a^2v_0}e^{a^2s} + \text{Const. gibt.}$$

Wird der Abstand s von dem Punkte an gezählt, welchen der bewegte Punkt zur Zeit $t = 0$ einnimmt, so hat man

$$0 = \frac{1}{a^2 v_0} + \text{Const., und}$$

$$t = \frac{1}{a^2 v_0}(e^{a^2 s} - 1) \text{ oder}$$

$$s = \frac{1}{a^2} \ln (a^2 v_0 t + 1).$$

Der Abstand wächst daher immerwährend mit der Zeit.

Ist gegeben $f = -a^2 s$,

wo wieder a eine reelle Constante ist, so gibt die obige allgemeine Bewegungsgleichung

$$v\,dv = -a^2 s\,ds.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$v^2 - v_0{}^2 = -a^2 s^2 \text{ oder } v^2 = v_0{}^2 - a^2 s^2,$$

wo v gleich v_0 für $s = 0$ vorausgesetzt ist. Diese Gleichung zeigt, dass v_0 die grösste Geschwindigkeit ist, welche der Punkt erlangt, dass diese Geschwindigkeit für $s = 0$ eintritt; dass die Geschwindigkeit kleiner wird, wenn sich der Punkt nach der Seite der positiven oder der negativen s hin bewegt, und dass die Geschwindigkeit Null wird für

$$s = \pm \frac{v_0}{a},$$

welches die grösste Ausweichung des Punktes von s gleich Null nach der einen oder der andern Seite hin ist.

Setzt man $\frac{ds}{dt}$ für v, so erhält man aus obiger Gleichung

$$\frac{ds}{\sqrt{v_0{}^2 - a^2 s^2}} = dt$$

und

$$\frac{1}{a} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{as}{v_0}\right) = t + \text{Const.}$$

Zählt man die Zeit von da, wo $s = 0$ ist, so hat man die Constante gleich Null und

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{as}{v_0}\right) = at \text{ oder } s = \frac{v_0}{a} \sin at.$$

Diese Gleichung bestimmt eine periodische Bewegung, welche in Nr. 34 bereits Beispielweise betrachtet wurde.

Das letzte Beispiel hätte man auch so behandeln können. Es ist gegeben

$$f = \frac{d^2 s}{dt^2} = -a^2 s.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$s = A \sin at + B \cos at,$$

wo ein A und B willkührliche Constanten sind.

Soll nun wie in der eben behandelten Betrachtung dieser Aufgabe $s = 0$ sein für $t = 0$, und dabei die Geschwindigkeit gleich v_0, so gibt die erste dieser Bedingungen $0 = B$, womit

$$s = A \sin at \text{ und daraus } \frac{ds}{dt} = v = Aa \cos at.$$

Die letzte dieser Gleichungen gibt für $t = 0$; $v_0 = Aa$, woraus A bestimmt wird. So erhält man

$$s = \frac{v_0}{a} \sin at$$

wie oben, als die Gleichung der Bewegung.

Geradlinige, veränderliche Bewegung. Dynamik.

41. Es wird hier immer vorausgesetzt, dass alle wirkenden Kräfte zu einer Resultirenden zusammengesetzt seien, und man also immer nur eine Kraft zu beachten habe. Diese muss in der Richtung der bereits bestehenden Bewegung oder ihr direct entgegen liegen, wenn die Bewegung eine geradlinige werden soll.

42. Die Erfahrung lehrt, dass derselbe Körper durch verschiedene Kräfte Beschleunigungen erlangt, welche diesen proportional und von der bereits erlangten Geschwindigkeit unabhängig sind.

43. Verschiedene Körper erlangen durch dieselbe Kraft verschiedene Beschleunigungen, wesshalb man ihnen verschiedene Mengen träger Materie, verschiedene Massen zuschreibt.

Man nennt die Massen zweier Körper gleich, wenn diese Körper durch gleiche Kräfte gleiche Beschleunigungen erlangen. Enthalten gleiche Volumen eines Körpers gleiche Massen, so heisst dieser Körper gleichartig dicht; ist dabei die Masse auch noch

durchaus von derselben Art, so heisst der Körper gleichartig, homogen. Bei gleichartigen Körpern ist daher die Masse dem Volum proportional.

44. Die Erfahrung lehrt, dass alle schweren Körper sich selbst überlassen, gleich schnell fallen, also durch die Schwerkraft dieselbe Beschleunigung erhalten. Die Grösse der Kraft, mit welcher ein Körper durch die Schwerkraft vertikal abwärts gezogen wird, nennt man sein Gewicht. Körper von gleichem Gewichte erhalten beim freien Falle, d. h. bei Ausschluss jeder andern Kraft, gleiche Beschleunigung; die Massen der Körper von gleichem Gewichte sind daher gleich gross.

45. Als Masseneinheit nimmt man gewöhnlich die Masse Wasser von einer bestimmten Temperatur, welche die Volumeneinheit erfüllt. Die Masse, welche in einem Kubikcentimeter Wasser bei der Temperatur der grössten Dichte — nahe 4° C. — enthalten ist, heisst 1 Gramm; 1000 solche Massen ein Kilogramm, 500 derselben ein Zollpfund (nämlich Pfund des deutschen Zollvereins). Ein Kubikmeter Wasser von der Temperatur der grössten Dichte des Wassers enthält die Masse 1000 Kilogramm.

46. Die Beschleunigung wird in dem gebrauchten Längenmaasse für die gewählte Zeiteinheit gemessen; für die letzte nimmt man gewöhnlich die Secunde der bürgerlichen oder mittleren Zeit; für die Masse ist soeben eine Maasseinheit aufgestellt worden; es ist nun noch übrig, auch eine Einheit für die Kräfte aufzustellen, was bisher noch nicht geschehen ist. Wir nehmen diejenige Kraft als Einheit, welche der Masseneinheit die Beschleunigung Eins mittheilt, also z. B. die Kraft, welche der Masse 1 Kilogramm die Beschleunigung 1 Meter in einer Secunde mittheilt, oder für das Fuss- und Pfundmaass, welche der Masse ein Pfund, die Beschleunigung ein Fuss in einer Secunde mittheilt.

47. Ertheilt die Kraft P der Masse m die Beschleunigung f; denkt man sich eine zweite Masse m hinter die erste in der Richtung der Kraft P gestellt, und lässt auf diese eine zweite Kraft P einwirken, so wird auch diese Masse die Beschleunigung f erlangen. Gehen also beide Massen zu gleicher Zeit von der Ruhe aus, so

werden beide immer zu gleicher Zeit dieselbe Geschwindigkeit haben und gleich weit gekommen sein, also immer unmittelbar hintereinander bleiben. Denkt man sich beide Massen zu einem Körper in dieser Lage vereinigt, so wird die Bewegung dieselbe bleiben. Dieser Körper hat aber nun die Masse 2m und auf ihn wirkt die Kraft 2P, während die Beschleunigung f ist. Die zweifache Kraft ertheilt also der zweifachen Masse dieselbe Beschleunigung, welche die einfache Kraft der einfachen Masse ertheilt.

Auf gleiche Weise findet man, dass der n fachen Masse m die n fache Kraft P dieselbe Beschleunigung ertheilt, welche die einfache Masse m durch die einfache Kraft P erhält; oder erhalten verschiedene Massen durch Kräfte dieselbe Beschleunigung, so verhalten sich die Kräfte wie die Massen.

48. Der Masse 1 ertheilt die Kraft 1 die Beschleunigung 1; soll der Masse m die Beschleunigung 1 ertheilt werden, so bedarf man dazu einer Kraft gleich m Krafteinheiten, nach dem soeben aufgestellten Satze.

Soll nun der Masse m die Beschleunigung f ertheilt werden, so muss nach dem Erfahrungssatze (Nr. 42) auch die Kraft f mal grösser werden, also fm Krafteinheiten.

Ertheilt die Kraft P Krafteinheiten einer Masse von m Masseneinheiten die Beschleunigung f Längeneinheiten, so ist

$$P = mf \qquad (4)$$

oder wie man sich gewöhnlich kürzer ausdrückt: die Kraft ist gleich der bewegten Masse multiplicirt mit der Beschleunigung, welche die Masse durch jene Kraft erlangt.

Man kann in obiger Gleichung f auch betrachten als die Kraft, welche auf jede Masseneinheit kommt. Diese nennt man oft die beschleunigende Kraft.

49. Ist m_1 die Masse eines schweren Körpers und g die Beschleunigung, welche allen frei fallenden Körpern zukommt, welche man die Beschleunigung der Schwere nennt und allgemein mit g bezeichnet, so ist die Grösse der Schwerkraft, welche die Masse m_1 abwärts treibt, das Gewicht der Masse m_1 nach dem Satze der vorhergehenden Nummer gleich

$$m_1 g.$$

50. Sehr häufig gibt man die Grösse einer Kraft P nicht in den oben genommenen Krafteinheiten an, sondern man gibt die Grösse der schweren Masse m_1 an, deren Gewicht der Kraft P gleich ist. Ist $P = mf = m_1 g$, so hat man

$$m_1 = \frac{P}{g}$$

und man findet daher diese Masse immer, wenn man die in Krafteinheiten ausgedrückte Kraft durch die Beschleunigung der Schwere dividirt.

Die Beschleunigung der Schwere oder g ist etwas verschieden an verschiedenen Orten der Erdoberfläche. Für Deutschland kann man $g = 9{,}81$ Meter nehmen, wenn man die Secunde als Zeiteinheit nimmt.

Demnach würde das Gewicht von 1 Kilogramm schwerer Masse $1 \times 9{,}81 = 9{,}81$ Krafteinheiten sein, wobei die Krafteinheit die ist, welche der Masse 1 Kilogramm die Beschleunigung 1 Meter in der Secunde ertheilt.

Ertheilt eine Kraft der Masse 6 Kilogramm die Beschleunigung $3^m{,}27$, so ist diese Kraft gleich $6 \times 3{,}27 = 19{,}62$ Krafteinheiten oder gleich dem Gewichte von $\frac{19{,}62}{9{,}81} = 2$ Kilogramm schwerer Masse.

Nimmt man statt der Secunde etwa die Minute als Zeiteinheit, so ist g die Zunahme der Geschwindigkeit in 60 Secunden, wobei sich aber die Geschwindigkeit dann ebenfalls auf die Minute beziehen muss, also 60 mal so gross ist, als wenn man die Secunde als Zeiteinheit wählt. Bezeichnet man mit V, G und T Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit, wenn die Minute als Zeiteinheit gewählt wird, mit v, g, t dasselbe für die Secunde als Zeiteinheit, so hat man, wenn ein fallender Körper zur Zeit Null von der Ruhe ausgeht

$$V = GT \text{ und } v = gt,$$

was mit

$$V = 60v \text{ und } T = \frac{t}{60}$$

gibt

$$G = 60^2 . g = 35376 \text{ Meter.}$$

Die Fallhöhe ist (Nr. 37)

$$h = \tfrac{1}{2} GT^2 = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

51. Der Satz (Nr. 38) gibt für die Masse m und die Kraft P

$$m\frac{dv}{dt} = mf = P$$

oder durch Integration

$$mv - mv_0 = \int_0^t P\,dt, \qquad (5)$$

wo v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit 0 ist.

Dem häufig vorkommenden Producte aus der Masse in die Geschwindigkeit hat man den Namen Grösse der Bewegung gegeben; dem Producte Pdt geben wir den Namen Antrieb der Kraft in der Zeit dt und nennen die Summe $\int_0^t P\,dt$ den Antrieb der Kraft in der Zeit t.

Damit lässt sich der Satz (5) so aussprechen:

Die Zunahme der Grösse der Bewegung in einer Zeit t ist gleich dem Antriebe der Kraft in dieser Zeit.

Ist die Kraft P constant, so wird der Antrieb während der Zeit t gleich Pt und daher

$$mv - mv_0 = Pt.$$

52. Der Satz (3, Nr. 40) gibt, wenn man mit der Masse m multiplicirt $m\,v\,dv = m\,f\,ds = P\,ds,$ und durch Integration

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0{}^2 = \int_{s_0}^{s} P\,ds, \qquad (6)$$

wo v_0 die Geschwindigkeit in dem Abstande s_0 ist. Das Product Pds aus der Kraft in die in der Linie der Kraft liegende Verschiebung des Angriffspunktes ds ist die Arbeit der Kraft für diese Verschiebung ds (Nr. 29), und das Integral rechts ist die Summe aller dieser Arbeiten auf dem Wege $s - s_0$, auf welchem die Geschwindigkeit von v_0 in v geändert wird. Wir nennen das Product aus der halben Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit dieser Masse die lebendige Kraft dieser Masse. Mit dieser Benennung lässt sich obige Gleichung so aussprechen: Die Zunahme der lebendigen Kraft einer Masse auf einem gegebenen Wege ist gleich der Arbeit der Kraft auf diesem Wege.

Ist die Kraft constant, so wird obige Gleichung

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = P(s - s_0).$$

Bemerkt muss hier werden, dass viele Schriftsteller das Product mv^2 die lebendige Kraft der Masse m nennen, wo dann die Zunahme der lebendigen Kraft gleich der zweifachen Arbeit der bewegenden Kraft ist.

53. Ist die anfängliche Geschwindigkeit der Masse m gleich v_0, wirkt die constante Kraft P der Bewegung entgegen, so ist die Arbeit dieser Kraft negativ, und die Geschwindigkeit nimmt ab. Ist der anfängliche Abstand $s_0 = 0$ und wird, wenn der Abstand s erreicht ist, die Geschwindigkeit gleich Null, so gibt der Satz über die lebendigen Kräfte

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -Ps \text{ oder } \frac{1}{2}mv_0^2 = Ps.$$

Die Masse m mit der Geschwindigkeit v_0 hat daher das Vermögen eine ihrer Bewegung entgegenwirkende Kraft P, einen Widerstand, durch einen Weg s fortzuführen, so dass die geleistete Arbeit Ps dem Producte $\frac{1}{2}mv_0^2$ gleich ist; daher der Name lebendiger Kraft.

Wirkt umgekehrt eine Kraft P auf eine anfänglich in Ruhe befindliche Masse m, so wird sie dieser auf dem Wege s eine Geschwindigkeit v mittheilen, welche aus

$$\frac{1}{2}mv^2 = Ps$$

bestimmt ist. Hier wird die Arbeit der Kraft P auf dem Wege s dazu verwendet, der Masse m Geschwindigkeit mitzutheilen, in ihr lebendige Kraft anzusammeln, welche dann wieder vermag eine gleich grosse Arbeit zu leisten.

Aufgaben über geradlinige Bewegung.

a. Der freie Fall einer schweren Masse m.

54. Die bewegende Kraft ist das Gewicht der Masse m, gleich mg; diese Kraft geht vertical abwärts. Geht die Masse von der Ruhe aus, so bewegt sie sich vertical abwärts, in welcher Richtung wir den zur Zeit t erreichten Abstand h von dem Ausgangspunkte der Masse an messen. Die Zeit zählen wir ebenso von dem Zeitpunkte an, in welchem sich die Masse zu bewegen anfängt. Ist v

die Geschwindigkeit der Masse zur Zeit t, so gibt der Satz vom Antriebe (Nr. 51)

$$m v = m g t \text{ oder } v = g t; \qquad \text{(a)}$$

Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte mit der Beschleunigung g, unabhängig von der Grösse der Masse m (Nr. 44).

Der Satz von der Arbeit gibt

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = m g h \text{ oder } v^2 = 2 g h; \qquad \text{(b)}$$

das Quadrat der Geschwindigkeit ist der Fallhöhe proportional, oder die Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der Fallhöhe. Eliminirt man v aus (a) und (b), so erhält man

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad \text{(c)}$$

Die Fallhöhe ist dem Quadrate der Fallzeit proportional, und in der ersten Zeiteinheit oder für $t = 1$ gleich der halben Beschleunigung. (Vergl. Nr. 37.)

b. Der vertical aufwärts geworfene schwere Körper.

55. Ist m die Masse, so ist mg das Gewicht des Körpers. Misst man den Abstand h, welchen der Körper in der Zeit t erreicht, vom Ausgangspunkte vertical aufwärts, so ist die bewegende Kraft $-mg$, und wenn v die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t ist, v_0 aber die Geschwindigkeit im Ausgangspunkte zur Zeit $t = 0$, so ist nach dem Satze vom Antriebe

$$m v - m v_0 = - m g t \text{ oder}$$
$$v_0 - v = g t; \; v = v_0 - g t. \qquad \text{(a)}$$

Der Satz von der Arbeit gibt

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = - m g h \text{ oder}$$
$$v^2 = v_0^2 - 2 g h. \qquad \text{(b)}$$

Die Geschwindigkeit wird kleiner, wenn der Körper höher kommt, und wird Null in der Höhe H, für welche

$$v_0^2 = 2 g H \qquad \text{(c)}$$

ist.

Substituirt man diesen Ausdruck für v_0^2 in die Gleichung (b), so wird diese

$$v^2 = 2 g (H - h). \qquad \text{(d)}$$

Aus der Vergleichung dieser Formel mit der Gleichung (b) in der vorhergehenden Aufgabe sieht man, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, welche ein frei von dem

höchsten Punkte der Bahn herabfallender Körper an dieser Stelle erreicht hat. Durch jeden Punkt seiner Bahn steigt der Körper zuerst mit dieser Geschwindigkeit aufwärts, erreicht den höchsten Punkt der Bahn, und fällt nun frei wieder zurück, und hat also, wenn er zum zweiten Male dieselbe Stelle passirt, wieder dieselbe Geschwindigkeit wie beim Aufsteigen, aber natürlich diessmal abwärts, oder v ist hier negativ. Kommt der Körper wieder zu der Ausgangsstelle, so ist dort die Geschwindigkeit wieder die Anfangsgeschwindigkeit v_0, aber abwärts, oder $-v_0$. Anfänglich hat der Körper die lebendige Kraft

$$\tfrac{1}{2} m v_0{}^2 = \tfrac{1}{2} m \,.\, 2gH = mgH.$$

Er ist dadurch vermögend, sein eigenes Gewicht mg auf die Höhe H zu erheben oder die Arbeit mgH zu leisten. Oben ist die Geschwindigkeit Null, die lebendige Kraft des Körpers ist durch die Erhebung seines Gewichtes auf die Höhe H, durch die geleistete Arbeit mgH ganz aufgezehrt. Fällt er nun wieder abwärts, so wird auf die Beschleunigung des Körpers die Arbeit der Schwerkraft, seines eigenen Gewichtes verwendet, und ist er durch die Höhe H herabgesunken, so ist diese auf den Körper verwendete Arbeit mgH und diese gleich der in dem Körper angesammelten lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} m v_0{}^2.$$

c. Der Fall eines schweren Körpers in einem widerstehenden Mittel.

56. Der Widerstand eines Mittels, in welchem sich ein Körper bewegt, hängt ab von der Form und Grösse dieses Körpers und von der Geschwindigkeit. Er ist Null, wenn die Geschwindigkeit Null ist, wächst immer mit dieser und würde unendlich gross werden, wenn die Geschwindigkeit diess werden könnte. Die Richtung des Widerstandes ist der Richtung der Bewegung entgegen. Wir bezeichnen mit w den Widerstand des Mittels, dividirt durch die Masse m des bewegten Körpers, so dass dieser Widerstand mw ist. w ist dann eine Funktion der Geschwindigkeit v, welche mit v zugleich Null wird, und bis ins Unendliche mit v wächst.

Zählt man die Zeit von dem Zeitpunkte, in welchem der Körper anfängt zu fallen, misst man den Abstand h, welchen der Körper in der Zeit t erreicht, von dem Ausgangspunkte des Körpers

an abwärts, und also ebenso die Geschwindigkeit v, so ist die bewegende Kraft $mg - mw$.

Damit gibt der Satz dem Antriebe

$$\left.\begin{aligned} mv &= mgt - m\int w\,dt \text{ oder} \\ v &= gt - \int w\,dt \text{ oder} \\ dv &= g\,dt - w\,dt. \end{aligned}\right\} (a)$$

Da die Geschwindigkeit von Null ausgeht, so geht auch w davon aus, und es ist also jedenfalls anfänglich w kleiner als g, die Zunahme der Geschwindigkeit positiv oder die Geschwindigkeit wächst, aber langsamer als beim freien Fall.

Mit der wachsenden Geschwindigkeit wächst auch der Widerstand und damit w, die Zunahme der Geschwindigkeit oder genauer die Beschleunigung wird daher kleiner. Aber die Geschwindigkeit fährt fort zu wachsen, und damit der Widerstand, bis endlich der Widerstand des Mittels dem Gewichte gleich geworden ist, oder $w = g$. Nun ist die Beschleunigung Null geworden, die Geschwindigkeit bleibt dieselbe, damit auch der Widerstand, die beiden auf die Masse m wirkenden Kräfte mg und mw sind und bleiben im Gleichgewichte, der Körper bewegt sich nun gleichförmig mit der erlangten Geschwindigkeit fort. Diese Geschwindigkeit findet man mit der Gleichung $g = w$,

wenn w als Function von v gegeben ist.

Für die Projectile der Artillerie kann man nach den Beobachtungen, welche in Metz angestellt wurden, den Widerstand der Luft gleich

$$0{,}028 \,.\, \pi r^2 v^2 (1 + 0{,}0023 v) \,.\, g$$

setzen, wenn r der Halbmesser der Kugel ist, und wie die Geschwindigkeit v in Metern gemessen ist. Die Einheit der Kraft ist dabei diejenige, welche der Masse 1 Kilogramm die Beschleunigung 1 Meter in der Secunde ertheilt.

Setzt man die Masse der Kugel gleich

$$\tfrac{4}{3}\pi \,.\, r^3 \Delta,$$

wo Δ die Masse in der Volumeneinheit, die mittlere Dichte der Kugel und, bei Hohlkugeln, ihres Inhaltes ist, wobei, falls das Mittel

auch schwer ist, die Dichte dieses Mittels abgezogen werden muss, was in der Hydrostatik erklärt wird, so hat man

$$w = 0{,}021 \cdot \frac{v^2}{r\Delta}(1 + 0{,}0023\,v)\,g$$

und also für Bestimmung der Gränze der Geschwindigkeit, welcher sich die Bewegung nähert, und mit welcher sie endlich gleichförmig fortgeht

$$0{,}021\,\frac{v^2}{r\Delta}(1 + 0{,}0023\,v) = 1.$$

Man sieht, diese Endgeschwindigkeit wird um so grösser, je grösser der Halbmesser der Kugel und je dichter diese ist. Für eine Zwölfpfünder-Kugel ist $r = 0{,}0591$ und $\Delta = 7200$; damit wird obige Gleichung

$$v^2(1 + 0{,}0023\,v) = 20260.$$

Setzt man hier zuerst

$$v^2 = 20260,$$

so erhält man $v = 142$, was zu gross ist. Damit wird

$$0{,}0023\,v^3 = 6586, \text{ und } v^2 = 20260 - 6586 = 13674.$$

Daraus findet man einen zweiten Näherungswerth $v = 117$, welcher zu klein ist. Durch weitere Fortsetzung dieser Rechnung findet man die Endgeschwindigkeit zwischen 125 und 126 Meter.

Eine, wie die obige, gusseiserne Kugel von nur 1 Millimeter Durchmesser gibt dagegen die Endgeschwindigkeit nur 13 Meter ungefähr.

Für so kleine Geschwindigkeiten kann man $0{,}0023\,v$ gegen 1 vernachlässigen, und dann hat man die Endgeschwindigkeit gleich

$$\sqrt{\frac{r\Delta}{0{,}021}}.$$

Diese ist daher bei gleicher Dichte der Körper der Quadratwurzel aus dem Halbmesser, und bei gleichem Halbmesser der Quadratwurzel aus der Dichte proportional.

Bei der Bewegung in andern Mitteln, z. B. in Wasser, finden ähnliche Rechnungen statt, nur ist dort der Widerstand viel grösser, bei Wasser etwa 800mal so gross als bei Luft. Hier werden also bei gleicher Grösse der Körper und bei gleicher Dichte die Endgeschwindigkeiten sehr viel kleiner. Man benützt diese Sätze beim Schlämmen, bei welchem man bei Körpern von einerlei Dichte die

von kleinerem Durchmesser von denen von grösserem Durchmesser durch das Fallen in Wasser oder einer andern Flüssigkeit trennt, und bei manchen Verfahrungsarten zur Aufbereitung der Erze, bei welchen man von verschiedenen Körpern von möglichst gleichem Korne oder Durchmesser die dichteren von den weniger dichten durch dieses Mittel sondert.

57. Oben ist angenommen, der fallende Körper gehe von der Ruhe aus; wird er mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertical ab wärts geworfen, so kann diese kleiner oder grösser sein als die oben bestimmte Endgeschwindigkeit; damit ist dann auch der Widerstand des Mittels kleiner oder grösser als das Gewicht des Körpers. Im ersten Falle wächst die Geschwindigkeit so lange, bis hierdurch der Widerstand des Mittels dem Gewichte des Körpers gleich geworden ist, was eintritt, wenn die oben bestimmte Endgeschwindigkeit erreicht ist; im andern Falle nimmt die Geschwindigkeit und damit auch der Widerstand des Mittels ab, bis auch hier die Geschwindigkeit erreicht ist, für welche der Widerstand des Mittels dem Gewichte des Körpers gleich ist, also dieselbe Endgeschwindigkeit wie im ersten Falle.

Setzt man, wie diess für nicht sehr grosse Geschwindigkeiten angenommen werden kann,

$$w = \frac{v^2}{a^2} g,$$

wo also a diese Endgeschwindigkeit ist, so gibt die Gleichung (a)

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = g\,dt,$$

und

$$a^2 \ln \frac{a+v}{a-v} = 2gt,$$

wozu keine Constante kommt, wenn für $t = 0$ auch $v = 0$ werden soll. Aus dieser Gleichung folgt

$$v = a\frac{e^{\frac{2gt}{a}} - 1}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1} = a\frac{e^{\frac{gt}{a}} - e^{-\frac{gt}{a}}}{e^{\frac{gt}{a}} + e^{-\frac{gt}{a}}}. \qquad \text{(b)}$$

Setzt man hier $\frac{dh}{dt}$ für v, so erhält man die Fallhöhe in der Zeit t

$$h = \frac{a^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{a}} + e^{-\frac{gt}{a}}}{2}, \tag{c}$$

wo die Constante bereits so bestimmt ist, dass $h = 0$ wird für $t = 0$.

Aus den Gleichungen (b) und (c) kann man t eliminiren, um die erlangte Geschwindigkeit durch die Fallhöhe auszudrücken. Einfacher führt aber dazu der Satz von der Arbeit, welcher, wenn man mit der Masse dividirt, gibt

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dh \text{ oder}$$

$$\frac{v\,dv}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = g\,dh \text{ und daraus}$$

$$-a^2 \ln\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 2gh \text{ oder}$$

$$a^2 \ln \frac{a^2}{a^2 - v^2} = 2gh, \tag{d}$$

wozu keine Constante kommt, weil für $v = 0$ auch $h = 0$ wird.

Die Gleichung (b) zeigt, dass die Endgeschwindigkeit $v = a$ erst für $t = \infty$ erreicht wird; dass die Geschwindigkeit sich dieser Grenze, wenn a nicht sehr gross ist, ausserordentlich schnell nähert, da $e^{-\frac{gt}{a}}$ dann gegen $e^{+\frac{gt}{a}}$ sehr bald sehr klein wird. Für ein sehr kleines a und ein nicht zu kleines t gibt die Gleichung (c) annähernd

$$h = \frac{a^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{a}}}{2} = \frac{a^2}{g}\left(\frac{gt}{a} - \ln 2\right)$$

$$= at - \frac{a^2}{g} \ln 2,$$

wo die Höhe gleichförmig mit der Zeit wächst.

Für ein sehr grosses a oder überhaupt für kleine Werthe von $\frac{gt}{a}$ kann man obige Ausdrücke in Reihen nach Potenzen dieses Ausdrucks entwickeln, und erhält so

$$v = gt\left(1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{gt}{a}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(\frac{gt}{a}\right)^4 - \ldots\right)$$

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \left(1 - \frac{5}{12}\left(\frac{gt}{a}\right)^2 + \frac{61}{720}\left(\frac{gt}{a}\right)^4 - \ldots\right).$$

Diese Ausdrücke kann man benützen, um die Abweichungen von der Geschwindigkeit und der Fallhöhe beim freien Fall für die ersten Zeiten zu berechnen.

d. Der in einem widerstehenden Mittel vertical aufwärts geworfene Körper.

58. Misst man den Abstand vertical aufwärts und von dem Punkte an, von welchem der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 zur Zeit 0 vertical aufwärts ausgeht, so ist die auf den Körper in dieser Richtung wirkende Kraft

$$-mg - mw,$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -g - w.$$

Diese Gleichung gilt, so lange der Körper aufwärts steigt, so wie er aber seinen höchsten Punkt erreicht hat, und wieder fällt, so wird, weil der Widerstand des Mittels der Bewegung immer entgegengeht, die bewegende Kraft und die Beschleunigung

$$-mg + mw \text{ und } -g + w.$$

Die ersten beiden Gleichungen gelten daher nur für die Bewegung aufwärts. Setzt man, wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$w = \frac{v^2}{a^2} g,$$

so wird

$$\frac{dv}{1 + \frac{v^2}{a^2}} = -g\,dt, \text{ woraus}$$

$$a \arctan \frac{v_0}{a} - a \arctan \frac{v}{a} = gt \text{ oder}$$

$$\tan \frac{gt}{a} = \frac{a(v_0 - v)}{a^2 - v_0 v} \text{ und}$$

$$v = a \frac{v_0 \cos \frac{gt}{a} - a \sin \frac{gt}{a}}{v_0 \sin \frac{gt}{a} + a \cos \frac{gt}{a}}. \tag{a}$$

Aus $v = \frac{dh}{dt}$ erhält man die Höhe, welche der Körper zur Zeit t erreicht hat

$$h = a \ln \left[\cos \frac{gt}{a} + \frac{v_0}{a} \sin \frac{gt}{a}\right], \tag{b}$$

wo die Constante so bestimmt ist, dass $h = 0$ wird für $t = 0$.

Der Satz von der Arbeit führt zu

$$\frac{v\,dv}{1+\frac{v^2}{a^2}} = -g\,dh,$$

woraus man nach Bestimmung der Integrationsconstante durch $v = v_0$ für $h = 0$ findet

$$a^2 \ln \frac{a^2 + v_0^2}{a^2 + v^2} = 2gh. \tag{c}$$

Aus der letzten Gleichung erhält man für $v = 0$ die grösste Höhe, welche der Körper erreicht,

$$h_1 = \frac{a^2}{2g} \ln \frac{a^2 + v_0^2}{a^2}, \tag{d}$$

was für ein gegen v_0 sehr grosses a nahe

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$$

wird, wie sie ohne widerstehendes Mittel wurde. Bei dem auf das Aufsteigen folgenden Fallen des Körpers erreicht er, wenn er durch die Höhe h_1 gefallen ist, eine Geschwindigkeit v, welche durch die Gleichung (d) der vorhergehenden Aufgabe

$$a^2 \ln \frac{a^2}{a^2 - v^2} = 2gh_1$$

gegeben ist. Aus dieser Gleichung und (d) in dieser Aufgabe findet man

$$\frac{a^2 + v_0^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}, \text{ was}$$

$$v^2 = \frac{a^2 v_0^2}{a^2 + v_0^2} \text{ gibt.}$$

Die beim Herabfallen von der Höhe h_1 erlangte Geschwindigkeit ist daher kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit v_0, und zwar um so mehr, je grösser $\frac{v_0}{a}$ ist. Für ein unendlich grosses a wird $v^2 = v_0^2$.

Die Zeit t_1, welche der Körper braucht, um auf die Höhe h_1 aufzusteigen, findet man aus (a), indem man dort $v = 0$ setzt, durch

$$\tan \frac{g t_1}{a} = \frac{v_0}{a} \quad \text{oder} \quad t_1 = \frac{a}{g} \operatorname{arc\,tan} \frac{v_0}{a}. \tag{e}$$

Diese Zeit ist kleiner als die, welche der Körper zum Herabfallen von der Höhe h_1 braucht, weil die Geschwindigkeiten auf-

wärts grösser sind als die beim Herabfallen. Man erhält nämlich, wenn man die Gleichung (c) von (d) abzieht, für das Aufsteigen

$$2g(h_1 - h) = a^2 \ln \frac{a^2 + v^2}{a^2},$$

woraus man zur Vergleichung der Geschwindigkeit v_1, welche in derselben Höhe beim Herabfallen erreicht wird, wie oben hat

$$v_1^2 = \frac{a^2 v^2}{a^2 + v^2};$$

es ist also v_1 in jeder Höhe immer kleiner als die Geschwindigkeit beim Aufsteigen durch diese Höhe.

Für die ganze Zeit, welche vom Abgange bis zur Rückkehr verfliesst, hat man aus (e) und der vorhergehenden Aufgabe

$$t_2 = \frac{a}{g}\left[\operatorname{arc\,tan}\frac{v_0}{a} + \ln\frac{v^0 + \sqrt{a^2 + v_0^2}}{a}\right]; \qquad \text{(f)}$$

für ein nicht widerstehendes Mittel wird a unendlich gross, und dafür geht die Formel in

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

über, wie sie aus der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgt.

Bestimmung der Kraft aus der Bewegung.

59. Ist die Bewegung eine bekannte und die Masse des bewegten Körpers gegeben, gleich m, so ist die bewegende Kraft mit den früher gebrauchten Bezeichnungen

$$mf = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

a. Bei **Morin's** Versuchen über die Reibung wurde eine schwere Masse m über eine horizontale Bahn durch eine zweite schwere Masse m_1 fortgezogen, welche vertical abwärts an einem Seile hing, das über eine Rolle mit der ersten Masse verbunden war, so dass beide Massen dieselbe Bewegung annehmen mussten. Diese Bewegung wurde als eine gleichförmig beschleunigte erkannt. Wie gross war hier die der Bewegung der Massen entgegenwirkende Reibung?

Bezeichnet man diese mit R, so ist die bewegende Kraft hier

$$m_1 g - R,$$

und ist f die beobachtete Beschleunigung, so ist, weil $m + m_1$ die bewegte Masse ist, wenn man von den Massen des Seils und der Rolle absieht

$$m_1 g - R = (m + m_1) f, \text{ woraus}$$
$$R = m_1 g - (m + m_1) f.$$

b. Die Kugel eines Zwölfpfünders erhält beim gewöhnlichen Schusse eine Geschwindigkeit von 488 Meter; die Länge des Wegs der Kugel ist hierbei die Länge der Seele des Rohrs weniger der Länge der Pulverladung und des Halbmessers der Kugel, welches $1^m,8944$ beträgt. Die Masse der Kugel ist 6,08 Kilogramm. Wie gross ist die mittlere Kraft oder die constante Kraft, welche auf diesem Wege dieser Kugel obige Geschwindigkeit mittheilt?

Der Satz über die Arbeit gibt, wenn P die bewegende Kraft ist

$$P \times 1{,}8944 = \tfrac{1}{2} \times 6{,}08 \times (488)^2, \text{ woraus}$$

$P = 382200$ Krafteinheiten oder gleich dem Gewichte von

$$\frac{382300}{9{,}81} = 38960 \text{ Kilogramm schwerer Masse.}$$

c. Wie gross ist die Kraft, welche der Masse m die Geschwindigkeit

$$v = \frac{a^2}{s}$$

mittheilt, wo a constant und s der Abstand ist?

Man hat die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2}{s^2} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{a^2}{s^2} \cdot v = -\frac{a^4}{s^3}$$

und die bewegende Kraft

$$P = -m\frac{a^4}{s^3}.$$

Die bewegende Kraft ist somit umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes und immer gegen den Anfangspunkt von s gerichtet, oder eine anziehende gegen diesen Punkt.

d. Ist gegeben

$$s = a\left(1 - \frac{v}{b}\right)$$

und dabei a und b positiv, so erhält man

$$\frac{ds}{dt} = v = -\frac{a}{b} \cdot \frac{dv}{dt}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{a}v = -\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2}s,$$

und die bewegende Kraft bei der Masse m

$$P = -m\frac{b}{a}v = -m\frac{b^2}{a} + m\frac{b^2}{a^2}s.$$

Diese Kraft ist daher ein Widerstand gegen die Bewegung, welcher der Geschwindigkeit proportional ist, oder sie besteht aus einem constanten Theile, welcher dem Abstande entgegengerichtet ist, und einem veränderlichen Theile, welcher in der Richtung des Abstandes wirkt und diesem proportional ist. Aus dem ersten Ausdrucke geht hervor, dass die als anfänglich positiv angenommene Geschwindigkeit abnimmt, und dass wenn sie Null geworden ist, auch die Kraft Null geworden ist. Der Körper bleibt daher von dort an in Ruhe. Diess findet statt, wenn der Abstand gleich a geworden ist. Die Gleichungen gelten daher nur für positive v.

Aus der Gleichung

$$v = -\frac{a}{b}\frac{dv}{dt} \text{ erhält man}$$

$$t = +\frac{a}{b}\ln\frac{v_0}{v}$$

wo v gleich v_0 gesetzt ist für $t = 0$; aus ihr sieht man, dass die Geschwindigkeit Null und damit Ruhe erst in unendlicher Zeit erreicht wird.

Krummlinige Bewegung. Phoronomie.

60. Misst man den Abstand des bewegten Punktes zur Zeit t auf der krummlinigen Bahn von einem Punkte dieser Bahn, und ist dieser Abstand gleich s; bewegt sich der Punkt in der darauf folgenden unendlich kleinen Zeit dt durch das Element der Bahn ds, so gibt diese Bewegung für die Zeiteinheit den gleichförmig durchlaufenen Weg

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

welcher einen Begriff gibt, wie schnell in dem Augenblicke dt der

Punkt sich bewegt, und welchen man wie früher die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t nennt. Die Richtung der Geschwindigkeit ist die Richtung des Elementes ds, das heisst, die Richtung der Tangente an die Bahn an der betrachteten Stelle nach der Seite hin, nach welcher die Bewegung erfolgt.

61. Für die Rechnung ist es meist bequemer, die jeweilige Lage des Punktes durch seine Coordinaten zu bestimmen. Sind x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten des bewegten Punktes zur Zeit t, so ist die Bewegung vollständig bekannt, wenn man x, y, z als Functionen der Zeit kennt.

Beispiel a. Ist $x = a$; $y = b + ct$ und $z = 0$, so ist die Bewegung eine geradlinige, zur y Axe parallele, in der x, y Ebene von der Axe y um a wegliegende. Sie ist gleichförmig und die mit der y Axe parallele Geschwindigkeit gleich c.

b. Ist $x = at$; $y = b + ct$ und $z = 0$, so geschieht die Bewegung in der x, y Ebene. Man findet die Gleichung der Bahn, wenn man t aus den beiden ersten Gleichungen eliminirt,

$$y = b + \frac{c}{a} x.$$

Die Bewegung ist eine geradlinige.

c. Ist $x = at^2$; $y = b + ct$, und $z = 0$; so ist die Bahn eine ebene in der Ebene x, y liegende und ihre Gleichung

$$(y - b)^2 = \frac{c^2}{a} x.$$

Die Bahn ist eine Parabel, deren Axe der x Axe parallel ist, und von der x Axe um b wegliegt; der Scheitel liegt in der y Axe.

d. Ist $x = at$; $y = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ und $z = 0$; so liegt die Bahn in der x, y Ebene; ihre Gleichung ist

$$y = b \sin 2\pi \frac{x}{a\tau}.$$

e. Ist $x = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$; $y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} - \beta\right)$ und $z = 0$; so ist die Bahn eben und liegt in der x, y Ebene. Durch Elimination der Zeit t findet man die Gleichung der Bahn

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\beta + \frac{y^2}{b^2} = \sin\beta^2,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten liegt.

Die Neigung der Axen gegen die x Axe ist gegeben durch

$$\tan 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos\beta$$

oder wenn man $\frac{b}{a} = \tan\varphi$ setzt

$$\tan 2\alpha = \tan 2\varphi \cos\beta,$$

woraus man zwei um 90° auseinander liegende Werthe von α erhält.

Die Axen selbst sind die beiden Werthe von r, welche für diese Werthe von α die Gleichung

$$r^2 = \frac{a^2 \sin\beta^2 \tan\varphi^2}{\tan\varphi^2 \cos\alpha^2 - \tan\sin 2\alpha\cos\beta + \sin\alpha^2}$$

gibt.

Die Ellipse wird in der Zeit τ durchlaufen, weil nach dieser Zeit x und y wieder dieselben Werthe haben.

Ist $\beta = 0$, so geht die Ellipse in die gerade Linie

$$y = \frac{b}{a} = x\tan\varphi$$

über; die Amplitude der Oscillation ist $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos\varphi}$.

Ist dagegen $\beta = \pi$, so geht die Ellipse in die gerade Linie

$$y = -\frac{b}{a}x = -\tan\varphi$$

über, die Amplitude bleibt dieselbe.

Ist $\sin\beta^2 = 1$, und $b = a$, so geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser a über.

f. Ist $x = a\sin 2\pi\frac{t}{\tau}$; $y = a\cos 2\pi\frac{t}{\tau}$; $z = bt$, so ist die Gleichung der Projection auf die x, y Ebene eine Kreislinie vom Halbmesser a, nämlich

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

während z proportional mit der Zeit wächst. Die Bahn des Punktes ist eine Schraubenlinie, da der Kreis, die Projection in der x, y Ebene, ebenfalls proportional mit der Zeit oder gleichförmig durchlaufen wird.

62. Ist x der Abstand der Projection des bewegten Punktes auf die x Axe von dem Anfange der Coordinaten zur Zeit t, so ist $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher diese Projection die x Axe durchläuft. Man nennt diese die Seitengeschwindigkeit des bewegten Punktes in der Richtung x, oder auch nur die Geschwindigkeit in der Richtung x.

Sind y und z die beiden andern der rechtwinklichen Coordinaten des bewegten Punktes zur Zeit t, so sind ebenso

$$\frac{dy}{dt} \text{ und } \frac{dz}{dt}$$

die Geschwindigkeiten des Punktes nach den Richtungen y und z zur Zeit t.

Nun ist, wenn ds, dx, dy, dz die zu der Aenderung der Zeit um dt gehörigen Aenderungen des Abstandes des Punktes auf der Bahn selbst gemessen und seiner Coordinaten sind, so ist

$$dx = ds \cos(ds, x);\ dy = ds \cos(ds, y);\ dz = ds \cos(ds, z)$$

was durch dt dividirt, mit der Bezeichnung v der Geschwindigkeit, und weil v in der Richtung ds liegt

$$\frac{dx}{dt} = v \cos(v, x);\ \frac{dy}{dt} = v \cos(v, y);\ \frac{dz}{dt} = v \cos(v, z) \qquad (7)$$

gibt.

Die Seitengeschwindigkeit nach irgend einer Richtung ist die Projection der Geschwindigkeit auf diese Richtung. Dabei hat v kein Zeichen oder wird immer als positiv behandelt, während der Winkel von v mit irgend einer Richtung, z. B. x von der Seite der positiven x bis zu v gemessen, zwischen 0 und 180° liegt, und daher die Seitengeschwindigkeit nach x positiv oder negativ ist, je nachdem v, x ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Im ersten Falle ist diese Geschwindigkeit nach der Seite der positiven x, im andern nach der Seite der negativen x gerichtet.

Quadrirt man die drei obigen Gleichungen und addirt sie, so erhält man

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{7a}$$

Als geometrische Construction ergibt sich aus diesen Formeln, dass man die Geschwindigkeit v nach Grösse und Richtung gleich der Diagonale des Parallelepipeds hat, welches die drei aufeinander rechtwinklichen Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ und } \frac{dz}{dt}$$

zu Seiten hat. Mann nennt die Geschwindigkeit auch die Resultirende dieser Seitengeschwindigkeiten. Für die Beispiele der vorhergehenden Nummer erhält man hiernach:

a. Hier ist $\frac{dx}{dt} = 0;\ \frac{dy}{dt} = c;\ \frac{dz}{dt} = 0$

daraus $$v^2 = c^2$$

und $(v,x) = 90^0;\ (v,y) = 0$ und $(v,z) = 90^0$, d. h.

die Geschwindigkeit geht nach der Seite der positiven y, wobei vorausgesezt ist, dass c positiv ist. Ist aber c negativ, so wird $(v, y) = 180^0$ und die Geschwindigkeit geht nach der Seite der negativen y.

b. Es ist $\frac{dx}{dt} = a;\ \frac{dy}{dt} = c;\ \frac{dz}{dt} = 0$

$$v^2 = a^2 + c^2$$

und

$$\cos(v,x) = \frac{a}{+\sqrt{a^2+c^2}};\ \cos(v,y) = \frac{c}{+\sqrt{a^2+c^2}};\ \cos(v,z) = 0.$$

c. Hier ist $\frac{dx}{dt} = 2at;\ \frac{dy}{dt} = c;\ \frac{dz}{dt} = 0,$

$$v^2 = c^2 + 4a^2t^2$$

und $$\cos(v,x) = \frac{2at}{+\sqrt{c^2+4a^2t^2}};$$

$$\cos(v,y) = \frac{c}{+\sqrt{c^2+4a^2t^2}};\ \cos(v,z) = 0.$$

Die Geschwindigkeit ist also mit der Zeit veränderlich; sie

bildet mit der z Axe einen rechten Winkel, liegt also in der x, y Ebene, in welcher ihre mit der Zeit veränderliche Richtung durch die Winkel (v, x) und (v, y) vollständig bestimmt ist, aus welchen noch

$$\tan(v,x) = \pm \frac{c}{2at}.$$

Die letzte Gleichung lässt aber in Unkenntniss, in welcher Richtung die durch sie gegebene Linie durchlaufen wird. Diese hebt sich aber durch die Betrachtung des Zeichens von cos (v, x) oder von cos (v, y).

Ist z. B. a positiv, so weiss man, dass die Projection in der x Axe nach der Seite der positiven x fortschreitet, oder dass (v, x) ein spitzer Winkel ist, wonach das Zeichen in obiger Gleichung zu nehmen ist, welches c hat. Ist dieses positiv, so gilt das obere, ist c negativ das untere Zeichen, so dass tan (v, x) immer positiv wird, wie es für einen spitzen Winkel sein muss.

d. Die Seitengeschwindigkeiten sind

$$\frac{dx}{dt} = a; \; \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi b}{\tau} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}; \; \frac{dz}{dt} = 0.$$

$$v^2 = a^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\tau^2} \left(\cos 2\pi \frac{t}{\tau}\right)^2;$$

$$\cos(v,x) = \frac{a}{v}; \; \cos(v,y) = \frac{2\pi b \cos 2\pi \frac{t}{\tau}}{\tau v}; \; \cos(v,z) = 0.$$

Ist a positiv, so ist (v, x) immer ein spizter Winkel, welcher da v immer zwischen

$$a \text{ und } \sqrt{a^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\tau^2}} \text{ liegt,}$$

zwischen 0 und dem durch $\cos(v\,x) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\tau^2}}}$

bestimmten liegt. Der Punkt bewegt sich daher am langsamsten, mit der Gesckwindigkeit a, wenn er parallel der Axe x geht; seine grösste Geschwindigkeit hat er zugleich mit der grössten Neigung seiner Bahn gegen die x Axe.

e. Hier sind die Seitengeschwindigkeiten in der (x, y) Ebene

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{\tau} \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \text{ und } \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi b}{\tau} \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau} - \beta\right).$$

Diese Seitengeschwindigkeiten durch v dividirt geben die Cosinus der Winkel (v, x) und (v, y). Nimmt man nun an, a und b seien positiv, so wird für ein sehr kleines t, oder für den Anfang cos (v, x) positiv oder v, x ein spitzer Winkel. Liegt β zwischen 0 und π, so wird der anfängliche Werth von y negativ und der bewegte Punkt durchläuft daher seine elliptische Bahn von der Seite der negativen y nach der Seite der positiven x, oder von diesen zu den positiven y.

Liegt dagegen β zwischen π und 2π, so ist der anfängliche Werth von y positiv, und die Bahn wird in der Richtung von den positiven y zu den positiven x durchlaufen, also der ersten Richtung entgegen.

Ist $a = b$ und $\sin\beta^2 = 1$, so wird die Bahn ein Kreis, dieser wird in der Richtung x, y durchlaufen, wenn $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist, dagegen in der Richtung y, x, wenn $\beta = 3\frac{\pi}{2}$ ist. Die Geschwindigkeit v ist hierbei $= \frac{2\pi a}{\tau}$, die Bewegung eine gleichförmige.

Ist $\beta = 0$ oder π, so wird die Bahn eine Gerade, welche durch den Anfang der Coordinaten geht. Beidemal ist die anfängliche Geschwindigkeit so gerichtet, dass die Projection auf die x Axe nach deren positiven Seite hingeht.

f. Hier sind die Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{\tau}\cos 2\pi\frac{t}{\tau};\ \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi a}{\tau}\sin 2\pi\frac{t}{\tau};\ \frac{dz}{dt} = b,$$

woraus die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2} + b^2}$$

wird. Die Bewegung ist also eine gleichförmige. cos (v, z) wird $\frac{b}{v}$, also constant, die Neigung der Bahn gegen die z Axe ist also ebenso in allen Punkten der Bahn dieselbe.

63. Projicirt man den bewegten Punkt parallel zu drei schiefen Coordinatenaxen Ax, Ay, Az auf diese, und nennt man die hierdurch erhaltenen Abstände von A auf diesen Axen x, y, z zur

Zeit t; durchläuft der bewegte Punkt in der unendlich kleinen Zeit dt den Weg ds, und sind dx, dy, dz die schiefen Projectionen von ds auf die drei Axen Ax, Ay, Az, so nennt man auch dieses

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

die drei Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ nach diesen drei schiefen Richtungen.

Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass man auch aus diesen drei Seitengeschwindigkeiten die Geschwindigkeit selbst nach Grösse und Richtung erhält, wenn man über diesen drei Seitengeschwindigkeiten, diese nach ihren Richtungen an dem Ort des bewegten Punktes aufgetragen, ein Parallelepiped beschreibt, und die Diagonale zieht, welche von dem bewegten Punkte ausgeht. Man sagt hier, man habe die drei Seitengeschwindigkeiten zu ihrer Resultirenden zusammengesetzt.

Ist die Rede von der Geschwindigkeit nach einer Richtung n ohne weiteren Zusatz, so versteht man darunter immer die Geschwindigkeit der rechtwinklichen Projection des bewegten Punktes auf n.

64. Unter der Beschleunigung eines bewegten Punktes nach einer Richtung x versteht man die Beschleunigung der rechtwinklichen Projection des bewegten Punktes auf die Richtung x. Ist x der Abstand dieser Projection von einem bestimmten Punkte in der Richtung x, zur Zeit t, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

die Beschleunigung des bewegten Punktes nach dieser Richtung zur Zeit t.

65. Wir stellen uns die Aufgabe, die Beschleunigung eines Punktes nach einer gegebenen Richtung n zu bestimmen, wenn die Beschleunigungen desselben Punktes nach drei aufeinander rechtwinklichen Coordinatenaxen Ax, Ay, Az gegeben sind.

Sind zur Zeit t die Coordinaten des bewegten Punktes x, y, z, so ist der Abstand der Projection des Punktes auf n von einer

durch den Anfang der Coordinaten rechtwinklich auf n gelegten Ebene

$$n = x\cos(n,x) + y\cos(n,y) + z\cos(n,z);$$

daraus erhält man die Beschleunigung in der Richtung n gleich

$$\frac{d^2n}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos(n,x) + \frac{d^2y}{dt^2}\cos(n,y) + \frac{d^2z}{dt^2}\cos(n,z).$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf eine einfache Form bringen, wenn man mit Hilfe der Gleichungen.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\cos(f,x); \frac{d^2y}{dt^2} = f\cos(f,y); \frac{d^2z}{dt^2} = f\cos(f,z),$$

aus welchen $$f^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2$$

folgt, die Linie f nach Richtung und Länge construirt, was, wie man sieht, darauf hinaus kommt, die drei Beschleunigungen nach x, y, z an dem Orte des bewegten Punktes nach ihren Richtungen aufzutragen, ein Parallelepiped über diesen drei Linien zu beschreiben und die Diagonale von dem Orte des bewegten Punktes aus zu ziehen. Diese ist f nach Grösse und Richtung.

Setzt man die durch f ausgedrückten Werthe der Beschleunigungen nach den drei Coordinaten-Axen in den Ausdruck für die Beschleunigung nach n, so wird dieser

$$\frac{d^2n}{dt^2} = f[\cos(f,x)\cos(n,x) + \cos(f,y)\cos(n,y) + \cos(f,z)\cos(n,z)]$$
$$= f\cos(f,n). \tag{8}$$

Die Beschleunigung nach irgend einer Richtung n ist daher die Projection des oben construirten f auf diese Richtung. Daraus folgt, dass die Beschleunigung in der Richtung f ein Maximum ist, dass die Beschleunigung nach jeder andern Richtung kleiner ist, dass sie für jede Richtung, welche rechtwinklich auf f ist, Null ist, und positiv für jede, welche mit f einen spitzen, negativ für jede Richtung, welche mit f einen stumpfen Winkel bildet. Diess zeigt zugleich, dass f nach Grösse und Richtung von der Wahl der Coordinatenaxen unabhängig ist.

Wir nennen f die *Beschleunigung der Bewegung* im Gegensatze zur *Beschleunigung nach einer bestimmten Rich-*

tung, welche gleich der Projection der Beschleunigung der Bewegung auf diese Richtung ist.

66. Bestimmung der Beschleunigung für einige Bewegungen. Beispiel c in Nro. 57. Die Bewegung geschieht in der x, y Ebene und es ist

$$x = a t^2 \text{ und } y = b + c t.$$

Damit erhält man $\frac{d^2x}{dt^2} = 2a$ und $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$.

Es ist also die Beschleunigung constant, $f = 2a$ und geht parallel mit der x Axe. Der Winkel, welchen die Geschwindigkeit mit der x Axe bildet, ist gegeben durch (Nro. 62 c)

$$\cos(v, x) = \frac{2at}{\sqrt{c^2 + 4a^2t^2}}$$

woraus die Beschleunigung in der Richtung von v oder in der Tangente an die Bahn

$$f\cos(v, f) = f\cos(v, x) = \frac{4a^2t}{\sqrt{c^2 + 4a^2t^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{c^2 + 4ax}} \cdot \sqrt{\frac{x}{a}},$$

sich ergibt, welche also veränderlich ist, und keineswegs gleich f, wie man etwa glauben möchte.

Die Beschleunigung rechtwinklich auf die Bahn findet man

$$f\sin(v, x) = \frac{4ac}{\sqrt{c^2 + 4a^2t^2}} = \frac{4ac}{\sqrt{c^2 + 4ax}}.$$

Beispiel e in Nro. 62.

Hier ist

$$x = a\sin 2\pi\frac{t}{\tau};\; y = b\sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} - \beta\right);\; z = 0;$$

daraus $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} a\sin 2\pi\frac{t}{\tau} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} x$ und ebenso

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} y;\; \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Daraus erhält man mit $x^2 + y^2 = r^2$

$$f = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot r$$

$$\cos(f, x) = -\frac{x}{z};\; \cos(f, y) = -\frac{y}{z}.$$

Die Richtung von f geht daher von dem bewegten Punkte durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und die Beschleunigung ist der Entfernung des bewegten Punktes von diesem Anfangspunkte proportional.

Beispiel f. in Nro. 61. Hier erhält man

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} x; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} y \text{ und } \frac{d^2 z}{d t^2} = 0,$$

woraus die Beschleunigung f wie in dem letzten Beispiele folgt; sie geht hier der x, y Ebene parallel durch die z Axe.

Der Winkel der Beschleunigung mit der Bahn ist immer ein Rechter; die Beschleunigung nach der Tangente an die Bahn ist daher hier immer gleich Null, und das Maximum der Beschleunigung nach irgend einer Richtung liegt immer rechwinklich auf die Bahn.

67. Man kann die Beschleunigung nach einer bestimmten Richtung n auch durch die Geschwindigkeit v und den Winkel v, n ausdrücken. Es ist die Geschwindigkeit in der Richtung n gleich

$$v \cos(v, n)$$

und daraus die Beschleunigung in dieser Richtung

$$f \cos(f, n) = \frac{d[v \cos(v, n)]}{d t} =$$
$$= \frac{d v}{d t} \cos(v, n) - v \sin(v, n) \frac{d(v, n)}{d t}.$$

Damit erhält man die Beschleunigung in der Richtung der Tangente an die Bahn, oder kürzer die Beschleunigung nach der Bahn, indem man $(v, n) = 0$ setzt, gleich

$$\frac{d v}{d t} = f \cos(f, v), \tag{9}$$

was unmittelbar einzusehen ist.

Rechtwinklich auf die Bahn ist $(v, n) = 90^0$ und man hat die Beschleunigung

$$-v \frac{d(v, n)}{d t} \tag{10}$$

Nimmt man n rechtwinklich auf die Osculationsebene, so ist $d(v, n) = 0$ und daher die Beschleunigung in dieser Richtung gleich Null. Es liegt also die Beschleunigung der Bewegung, f in der Osculationsebene der Bahn. Rechtwinklich auf die Bahn und in

der Osculationsebene liegt der Krümmungshalbmesser der Bahn. Nimmt man diesen, und zwar von der Bahn nach dem Krümmungsmittelpunkt für n, so dass also n auf der concaven Seite der Bahn liegt, nennt man ϱ den Krümmungshalbmesser, und ds den Bogen der Bahn, welcher in der Zeit dt durchlaufen wird, während der Winkel (v, n) aus $\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}+d(v,n)$ übergeht, so ist

$$-\varrho\, d(v,n) = ds,$$

woraus die Beschleunigung nach dem Krümmungshalbmesser oder

$$f\cos(f,\varrho) = \frac{v}{\varrho}\,\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\varrho} \qquad (10\,a)$$

wird. Je grösser diese Beschleunigung bei gleicher Geschwindigkeit der Bewegung ist, desto kleiner wird ϱ, desto schneller die Bahn gekrümmt.

Beispiel c in Nro. 61.

In der vorhergehenden Nummer ist gefunden

$$f = 2a \text{ und } f \text{ parallel } x.$$

ferner in Nro. 66:

$$\cos(v,x) = \frac{2at}{v} \text{ und } v^2 = c^2 + 4a^2t^2.$$

Damit erhält man die Beschleunigung in der Bahn

$$f\cos(f,v) = f\cos(v,x) = 2a.\frac{2at}{v} = \frac{4a^2t}{v}$$

wie diess die Ableitung von v^2 nach t ebenfalls gibt.

Für die Beschleunigung nach dem Krümmungshalbmesser hat man

$$f\sin(f,v) = f\sin(v,x) = 2a\sqrt{1-\frac{4a^2t^2}{v^2}} =$$

$$= \frac{2a}{v}\sqrt{v^2-4a^2t^2} = \frac{2ac}{v}.$$

Diese Beschleunigung ist aber gleich

$$\frac{v^2}{\varrho},$$

daher der Krümmungshalbmesser der Bahn

$$\varrho = \frac{v^3}{2ac} = \frac{(c^2+4ax)^{\frac{3}{2}}}{2ac}.$$

Beispiel e in Nro. 61.

In der vorhergehenden Nummer ist gefunden

$$f = \frac{4\pi^2}{\tau^2} . r \text{ und f in der Richtung von r.}$$

Damit erhält man die Beschleunigung in der Bahn

$$\frac{dv}{dt} = f \cos(f, v) = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \cos(r, v).$$

Diese Beschleunigung ist daher gleich der Projection des Halbmessers der elliptischen Bahn auf die Tangente multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{4\pi^2}{\tau^2}$; sie ist positiv, wenn die Geschwindigkeit mit dem von der Bahn zum Mittelpunkte gezogenen Halbmesser einen spitzen Winkel bildet, andernfalls negativ.

Für die Beschleunigung nach dem Krümmungshalbmesser hat man $\frac{v^2}{\varrho} = f \sin(f, v) = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \sin(r, v)$, woraus man für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck

$$\varrho = \frac{v^2 \tau^2}{4\pi^2 r \sin(r, v)}$$

erhält.

Beispiel f in Nro. 61.

Hier ist die Beschleunigung f constant $= \frac{4\pi^2}{\tau^2} . a$ und immer normal auf der Bahn. Die Beschleunigung in dieser ist daher Null, oder die Bewegung ist eine gleichförmige. Die Beschleunigung nach dem Krümmungshalbmesser ist hier f selbst, daher

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} . a, \text{ woraus}$$

$$\varrho = \frac{\frac{4\pi^2}{\tau^2} a^2 + b^2}{\frac{4\pi^2}{\tau^2} a} = a + \frac{\tau^2}{4\pi^2} . \frac{b^2}{a}.$$

Krummlinige Bewegung. Dynamik.

68. Bei der geradlinigen Bewegung besteht die Wirkung der bewegenden Kraft in der Aenderung der Geschwindigkeit und ist proportional der Beschleunigung. Bei der krummlinigen Bewegung besteht die Wirkung der Kraft in Aenderung der Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn, und in Abänderung der Richtung der Bewegung, welch' letzteres, wie wir gesehen haben, in Ertheilung einer Beschleunigung normal zur Bahn besteht. Die Aenderung der Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn kann daher hier nicht das Maass für die Wirkung der Kraft allein geben. Auch kann die Kraft nicht in der Richtung der Bahn oder der Geschwindigkeit liegen, da dann keine Ursache zur Krümmung der Bahn vorhanden wäre. Dagegen wird die Kraft so liegen müssen, dass rechtwinklich zu ihr keine Wirkung, d. h. keine Beschleunigung stattfindet. Es wird also die Beschleunigung der Bewegung, das f der letzten Nummern dieselbe Richtung haben müssen, wie die bewegende Kraft.

Die Componente der Kraft in der Richtung der Bahn ändert die Richtung nicht ab, ihre Wirkung kann nur die Beschleunigung in der Bahn sein. Ist P die bewegende Kraft, m die bewegte Masse, v die Geschwindigkeit und f die Beschleunigung der Bewegung, so ist hiernach

$$P \cos (P, v) = m f \cos (f, v)$$

oder weil P und f in eine Richtung zusammen fallen

$$P = m f$$

wie bei der geradlinigen Bewegung.

Der Satz, dass auch bei krummliniger Bewegung die bewegende Kraft gleich der Masse multiplicirt mit der Beschleunigung ist, zeigt, dass die Beschleunigung, welche eine Kraft ertheilt, unabhängig von der bereits bestehenden Bewegung ist, was eine Erweiterung des Erfahrungssatzes in Nro. 42 ist.

69. Die Gleichungen (9) und (10) in Nro. 67 geben durch Multiplication mit der Masse

$$P \cos (P, v) = m \frac{dv}{dt} \text{ und } P \sin (P, v) = m \frac{v^2}{\varrho}, \qquad (11)$$

wozu noch kommt, dass die Kraft, als mit der Richtung der Be-

schleunigung zusammen fallend, immer in der Osculationsebene der Bahn liegt, und zwar auf der concaven Seite der Bahn.

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, dass die Krümmung der Bahn um so grösser ist, je grösser die Componente der Kraft normal zur Bahn ist.

Ist die Geschwindigkeit constant, ist $\frac{dv}{dt} = 0$, so ist die erste Componente der Kraft Null; in diesem Falle fällt die Richtung des Krümmungshalbmessers mit der Richtung der Kraft zusammen.

Um der Masse m eine kreisförmige Bewegung zu ertheilen, bedarf man in der Richtung der Bewegung, d. h. tangentiell an die Bahn eine Kraft

$$P \cos (P, v) = m \frac{dv}{dt}$$

und in der Richtung des Halbmessers gegen den Mittelpunkt des Kreises die Kraft

$$P \sin (P, v) = m \frac{v^2}{r}$$

wenn r der Kreishalbmesser ist.

Ist die Bewegung gleichförmig, so wird die erste dieser Kräfte Null und es bleibt nur die zweite übrig, oder

$$P = m \frac{v^2}{r}.$$

Man nennt häufig die Componente der bewegenden Kraft nach dem Krümmungshalbmesser die Centripetalkraft.

70. Ist P eine nach Grösse und Richtung constante Kraft, welche die Masse m bewegt, so geschieht die Bewegung in der Ebene, welche durch die anfängliche Geschwindigkeit v_0 der Masse und die Kraft geht. Zerlegt man nämlich P nach der Richtung von v_0 und rechtwinklich darauf, so liegt diese zweite Componente also ebenfalls in der Ebene P, v_0, die Ablenkung der Masse m aus der Richtung von v_0 liegt also wieder in derselben Ebene, und so für alle späteren Zeiten.

Die Beschleunigung in der Richtung von P ist

$$\frac{P}{m}$$

und die Projection auf eine zu P parallele Richtung durchläuft also in der Zeit t den Weg (Nro. 36)

$$\frac{1}{2}\frac{P}{m}.t^2+c\,t,$$

wenn c die anfängliche Geschwindigkeit dieser Projection ist. Diese anfängliche Geschwindigkeit ist aber $v_0 \cos(P, v_0)$. Daher der Weg der Projection auf die Richtung P gleich

$$\frac{1}{2}\frac{P}{m}t^2+v_0\cos(P,v_0).t.$$

Rechtwinklich auf diese Richtung ist die Beschleunigung Null, die anfängliche Geschwindigkeit ist $v_0 \sin(P, v_0)$; daher der Weg der Projection von m auf diese zweite Richtung in der Zeit t gleich

$$v_0\sin(P,v_0).t.$$

Trägt man diese beiden Wege von dem anfänglichen Ort der Masse m in der Richtung von P und rechtwinklich darauf, so dass diese rechtwinkliche Richtung mit v_0 einen spitzen Winkel bildet, und beschreibt über beiden ein Rechteck, so ist die gegenüberliegende Ecke dieses Rechtecks der Ort, welchen die Masse m zur Zeit t erreicht hat.

An denselben Ort kommt man aber auch, wenn man in der Richtung von P den Weg

$$\frac{1}{2}\frac{P}{m}.t^2$$

aufträgt, welchen die Masse m unter der Wirkung der Kraft durchlaufen hätte, wenn m von der Ruhe ausgegangen wäre, und wenn man auf die Richtung von v_0 den Weg $v_0\,t$ aufträgt, welchen die Masse m vermöge der Trägheit, nach Wegnahme der Kraft P in der Zeit t durchlaufen hätte; wenn man endlich über diesen beiden Linien ein Parallelogramm beschreibt. Die dem Ausgangspunkte der Masse m gegenüberliegende Ecke dieses Parallelogramms ist der oben bestimmte Ort, welchen die Masse m in Folge der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 und der Wirkung der Kraft P in der Zeit t erreicht.

Dasselbe gilt auch für eine stetig veränderliche Kraft P für eine unendlich kleine Zeit d t. Ist v die Geschwindigkeit der Masse m zur Zeit t, so würde sie vermöge der Trägheit den in der Rich-

tung von v liegenden Weg $v\,dt$ durchlaufen, vermöge der Kraft P von der Ruhe aus den Weg $\frac{1}{2}\frac{P}{m}dt^2$ in der Richtung von P. Den Ort, welchen die Masse in dieser Zeit dt erreicht, findet man als die dem Ort zur Zeit t gegenüberliegende Ecke des Parallelogramms, welches die zwei Seiten $v\,dt$ in der Richtung von v und $\frac{1}{2}\frac{P}{m}dt^2$ in der Richtung von P hat. Die Aenderung von P während dieser Zeit bringt nur eine Aenderung dieses Ortes hervor, welche ein unendlich Kleines von höherer als der zweiten Ordnung ist.

Kennt man die Geschwindigkeit einer Masse m, ihre Geschwindigkeit v und die Orte, die sie zur Zeit t inne hatte und nach der Zeit $t + dt$ erreicht, so lässt sich hiermit die bewegende Kraft P der Grösse und Richtung nach bestimmen. Man trägt in der Richtung von v von dem Orte der Masse zur Zeit t den Weg $v\,dt$ auf, und verbindet den Endpunkt dieses Wegs mit dem Orte, welchen die Masse zur Zeit $t + dt$ erreicht hat. Diese Verbindungslinie, die Ablenkung oder Deviation in der Zeit dt ist der Richtung der Kraft P parallel, und gleich

$$\frac{1}{2}\frac{P}{m}dt^2$$

woraus P gefunden werden kann.

Bewegt sich z. B. eine Masse m gleichförmig mit der Geschwindigkeit v in einem Kreise vom Halbmesser r, so würde diese Masse vermöge der Trägheit in der Zeit dt den Weg $v\,dt$ nach der Tangente an den Kreis durchlaufen, während sie in der That den Bogen $v\,dt$ auf dem Kreise durchläuft. Die Ablenkung ist, da der Sinus und der Bogen bei unendlich kleinem Winkel bis auf unendlich Kleine der dritten Ordnung gleich sind, dem Radius im Anfange von $v\,dt$ parallel und gleich

$$r\left(1 - \cos\frac{v\,dt}{r}\right) = r \cdot \frac{1}{2}\frac{v^2 dt^2}{r^2},$$

wenn man die unendlich Kleinen höherer Ordnung weglässt.

Setzt man diese Ablenkung gleich

$$\frac{1}{2}\frac{P}{m}dt,$$

so erhält man $$P = m\frac{v^2}{r}$$

in der Richtung des Radius, die Centripetalkraft, wie sie in der vorhergehenden Nummer bestimmt ist.

71. Aus (Nro. 65, 8) hat man für eine beliebige Richtung n

$$f\cos(f, n) = \frac{d^2 n}{dt^2}, \text{ woraus}$$

$$m f\cos(f, n) = m\frac{d^2 n}{dt^2},$$

oder da f und die Kraft P einerlei Richtung haben

$$P\cos(P, n) = m\frac{d^2 n}{dt^2}.$$

Die Componente der Kraft in der Richtung von n ist gleich der bewegten Masse multiplicirt mit der Beschleunigung nach dieser Richtung.

Bringt man in die gerade Linie n eine Masse m, gleich der bewegten m, und lässt man auf diese in jedem Augenblicke die Componente der Kraft nach der Richtung n einwirken, so wird diese Masse m immer die Beschleunigung haben, welche der Projection der in der That bewegten Masse m auf die Linie n zukommt. Bringt man also diese Masse m noch in die anfängliche Lage der Projection der ersten Masse m, und ertheilt ihr die anfängliche Geschwindigkeit dieser Masse m in der Richtung n, so wird sie auch immer die Projection der bewegten Masse bleiben.

Bringt man in jede von drei aufeinander rechtwinklichen Coordinatenaxen eine der bewegten Masse m gleiche Masse, bringt diese anfänglich, d. h. für $t = 0$ in die Stellen der Projectionen der bebewegten Masse m, ertheilt jeder die anfängliche Seitengeschwindigkeit der bewegten Masse nach der betreffenden Richtung, und lässt endlich auf jede dieser drei Massen je die Componente der Kraft nach dieser Richtung wirken, so werden sich diese drei Massen so bewegen, dass sie immer die Projectionen der krummlinig bewegten Masse sind. Man hat also statt der Bewegung der krummlinig bewegten Masse die geradlinigen Bewegungen dreier gleicher Massen zu betrachten, und erfährt durch diese die Bewe-

gungen der Projectionen der krummlinig bewegten Masse auf die drei Coordinatenaxen, wodurch die Bewegung bekannt ist.

Sind also x, y, z die drei rechtwinklichen Coordinaten des bewegten Punktes zur Zeit t, so hat man

$$P\cos(P,x)=m\frac{d^2x}{dt^2};\ P\cos(P,y)=m\frac{d^2y}{dt^2};\ P\cos(P,z)=m\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (12)$$

Beispiel a. Ein schwerer Körper von der Masse m wird mit der anfänglichen Geschwindigkeit unter dem Winkel α gegen den Horizont aufwärts hinausgeworfen. Die Bewegung zu bestimmen.

Nimmt man die Coordinaten x und y horizontal, z vertical aufwärts von dem Ausgangspunkte des Körpers an; x in der Verticalebene durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0, so ist die bewegende Kraft mg constant und vertical abwärts gehend. Damit werden die Gleichungen (12)

$$0=m\frac{d^2x}{dt^2};\ 0=m\frac{d^2y}{dt^2};\ -mg=m\frac{d^2z}{dt^2}. \quad (a)$$

Die beiden ersten geben

$$x=a+bt;\ y=c+dt,$$

wo a, b, c, d die Integrationsconstanten sind. Da x und y vom Ausgangspunkte des Körpers gemessen werden, so werden sie, wenn man die Zeit von dem Zeitpunkte zählt, in welchem der Körper aus diesem Ausgangspunkte ausgeht, Null für $t=0$, was $a=0$ und $c=0$ gibt.

Die Geschwindigkeiten nach beiden Richtungen sind

$$\frac{dx}{dt}=b \text{ und } \frac{dy}{dt}=d$$

also constant. Für $t=0$ ist die Geschwindigkeit in der Richtung der x Axe $v_0\cos\alpha$ und die Geschwindigkeit in der Richtung der y Axe gleich Null; es ist daher

$$b=v_0\cos\alpha \quad \text{und } d=0.$$

Damit wird

$$x=v_0 t\cos\alpha \quad \text{und } y=0. \quad (b)$$

Die Bewegung geschieht daher in der x, z Ebene, was auch vorneherein zu sehen war.

Die dritte der Gleichungen gibt durch Integration

$$z = kt - \tfrac{1}{2}gt^2$$

wo k eine Integrationsconstante ist, und die andere gleich Null bestimmt ist, wegen $z = 0$ für $t = 0$.

Die Geschwindigkeit in der Richtung z wird damit

$$\frac{dz}{dt} = k - gt$$

was für $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit in dieser Richtung oder $v_0 \sin\alpha$ geben muss. Es ist daher vollständig bestimmt

$$z = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{c}$$

Durch die Gleichungen (b) und (c) ist die Bewegung vollständig bestimmt.

Setzt man $v_0 = \sqrt{2gh}$, wo also h die Höhe ist, von welcher der Körper frei herabfallen müsste, um die Geschwindigkeit v_0 zu erhalten, so wird die Gleichung der Bahn

$$z = x\tan\alpha - \frac{x^2}{4h\cos\alpha^2}. \tag{d}$$

Diese Gleichung erhält man unmittelbar durch die Betrachtungen der Nro. 70. Vermöge der anfänglichen Geschwindigkeit würde der Körper in der Zeit t den Weg $v_0 t$ durchlaufen und daher die Höhe $v_0 t \sin\alpha$ erreichen, und die horizontale Distanz $v_0 t \cos\alpha$.

Die Kraft ist vertical, durch sie wird daher die horizontale Bewegung nicht geändert, und ist x der in der Zeit t erreichte horizontale Abstand, so ist $x = v_0 t \cos\alpha$ wie oben. Damit wird die Höhe, auf welche der Körper in dieser Zeit vermöge der anfänglichen Geschwindigkeit aufsteigen würde

$$x\tan\alpha,$$

welches das erste Glied der Gleichung (d) ist.

Durch die Schwere wird ein von der Ruhe ausgehender Körper in der Zeit t durch den Weg $\frac{1}{2}gt^2$ abwärts geführt, was durch x ausgedrückt

$$\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0\cos\alpha^2} = \frac{x^2}{4h\cos\alpha^2}$$

wird, das zweite Glied der Seite rechts der Gleichung (d).

Die Bahn des geworfenen Körpers ist eine Parabel, deren Axe vertical steht; die grösste Höhe, welche der Körper erreicht, ist

$$z_1 = h \sin \alpha^2$$

und die Abscisse dieser grössten Höhe oder die halbe Wurfweite

$$x_1 = h \sin 2\alpha.$$

Die Directrix der Bahn liegt in der Höhe h über dem Ausgangspunkte. Hat man h bestimmt, so lassen sich z_1 und x_1 leicht geometrisch construiren, womit die Parabel selbst geometrisch bestimmt ist.

Die grösste Wurfweite erhält man für $\sin 2\alpha = 1$, also für die Elevation des Wurfs $\alpha = 45^0$; sie wird 2h, wobei die grösste erreichte Höhe gleich $\frac{1}{2}$h.

Für die Geschwindigkeit der Bewegung findet man

$$v = \sqrt{2g(h-z)},$$

sie ist also in jedem Punkte dieselbe, welche ein von der Höhe $h-z$ herabfallender Körper erlangt.

Im höchsten Punkte ist die Geschwindigkeit am kleinsten und gleich

$$\sqrt{2gh\cos\alpha^2} = v_0 \cos\alpha$$

gleich der horizontalen Anfangsseitengeschwindigkeit.

Aus der zweiten der Gleichungen (11, Nro. 69) erhält man noch

$$m g \cos(P, \varrho) = m \,.\, \frac{2g(h-z)}{\varrho}, \text{ woraus}$$

$$-\varrho \cos(z, \varrho) = 2(h-z), \text{ oder}$$

die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers ist gleich der doppelten Entfernung des Parabelpunktes von der Directrix, was die bekannte Construction des Krümmungsmittelpunktes gibt.

Beispiel b. Die Masse m wird durch eine Kraft gegen einen unbeweglichen Punkt angezogen, welche der Entfernung von jenem Punkte proportional ist.

Die Bewegung ist eine ebene, die Ebene der Bahn geht durch die anfängliche Geschwindigkeit und den Anziehungspunkt. Nimmt man diesen als Ursprung der rechtwinklichen Coordinaten x, y in der Ebene der Bewegung, nennt man r die Entfernung des bewegten Punktes von dem Ursprunge zur Zeit t, so kann man die bewegende Kraft

$$P = m k^2 r$$

setzen, wo k constant ist; ihre Componenten nach der x und y Axe sind dann

$$-mk^2x \text{ und } -mk^2y,$$

woraus die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

folgen.

Die allgemeinen Integrale dieser Gleichungen sind

$$x = A \sin kt + B \cos kt$$

$$y = A_1 \sin kt + B_1 \cos kt,$$

wo A, B, A_1 und B_1 vier willkürliche Constanten der Integration sind. Zu ihrer Bestimmung dient die Lage des bewegten Punktes zu irgend einer Zeit und die Geschwindigkeit, welche er dort hat. Ist für $t = 0$; $x = x_0$ und $y = 0$ und die Geschwindigkeit v_0 mit einer Richtung, welche mit der Axe der x den Winkel α bildet, diesen von x nach y gemessen, so hat man, wegen der ersten Bedingung

$$x_0 = B \text{ und } 0 = B_1.$$

Zur Benützung der zweiten Bedingung berechne ich zuerst die Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = Ak \cos kt - x_0 k \sin kt \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dt} = A_1 k \cos kt.$$

Nun wird für $t = 0$ die Geschwindigkeit in der x Axe $v_0 \cos \alpha$ und die Geschwindigkeit in der y Axe $v_0 \sin \alpha$, womit

$$v_0 \cos \alpha = Ak \text{ und } v_0 \sin \alpha = A_1 k$$

wird. Damit ist vollständig bestimmt

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \sin kt + x_0 \cos kt,$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{k} \sin kt.$$

Setzt man $\frac{v_0 \cos \alpha}{k} = b \cos \beta$ und $x_0 = -b \sin \beta$, woraus

$$b^2 = \frac{v_0{}^2 \cos \alpha^2}{k^2} + x_0{}^2 \text{ und } \tan \beta = -\frac{x_0 k}{v_0 \cos \alpha},$$ so wird

die erste dieser beiden Gleichungen

$$x = b \sin(kt - \beta),$$

womit die beiden Coordinaten auf die Gleichungen in Beispiel e, Nro. 61, 62 und 66 gebracht sind. Die Bewegung des Punktes geschieht in einer Ellipse; die Oscillationsdauer ist $\tau = \frac{2\pi}{k}$.

72. Wählt man statt der Coordinaten in der x, y Ebene Polarcoordinaten r und φ, während man die Coordinate z beibehält, so hat man

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi \text{ und } z = z. \tag{a}$$

Zerlegt man die bewegende Kraft P nach der Verlängerung von r gleich $P\cos(P,r)$, rechtwinklich darauf in der Ebene x, y, nach der Seite hin, nach welcher die Winkel φ wachsen, welche Componente $P\cos(P,n)$ heissen mag, und endlich nach z in $P\cos(P,z)$, so hat man

$$P\cos(P,r) = P\cos(P,x)\cos\varphi + P\cos(P,y)\sin\varphi,$$

was mit den Gleichungen (12 in Nro. 71) in

$$m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi\right] \tag{b}$$

übergeht. Ebenso hat man

$$\begin{aligned} P\cos(P,n) &= P\cos(P,y)\cos\varphi - P\cos(P,x)\sin\varphi \\ &= m\left[\frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi - \frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi\right] \end{aligned} \tag{c}$$

Aus den Gleichungen (a) erhält man aber durch zweimalige Ableitung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{dt}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{dt}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (b) und (c), so erhält man

$$P\cos(P,r) = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right],$$

$$P\cos(P,n) = m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right].$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit r, so erhält man

rechts eine vollständige Ableitung, und so die Gleichungen der Bewegung für diese Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} P\cos(P,r) &= m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right], \\ r.P\cos(P,n) &= m\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}, \\ P\cos(P,z) &= m\frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

73. Man kann in folgender Weise eine Anschauung von der Bedeutung dieser Formeln gewinnen. Aus dem Abstande r der bewegten Masse vom Ursprunge von r zur Zeit t wird in der Zeit dt

$$r + \frac{dr}{dt}dt + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2}dt^2,$$

wenn man bei den Unendlich Kleinen der zweiten Ordnung stehen bleibt. Der Theil $\frac{dr}{dt}dt$ dieses Zuwachses von r wird vermöge der zur Zeit t bestehenden Seitengeschwindigkeit in der Richtung von r durchlaufen, was vermöge der Trägheit geschieht. Von dem übrig bleibenden Theile $\frac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2}dt^2$ geht noch das Stück ab, das zur Zeit $t + dt$ zwischen dem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise und der Tangente an diesen an dem Orte der Masse zur Zeit t gezogen liegt, da die Masse vermöge der auf r rechtwinklichen Seitengeschwindigkeit nach der Tangente an den Kreis und nicht nach diesem fortgehen würde. Dieses ist nach dem Beispiele am Ende von Nro. 73

$$\tfrac{1}{2}\frac{v^2}{r}dt^2$$

wo v die Geschwindigkeit nach der Tangente des Kreises ist. Da aber der Endpunkt von r in der Zeit dt den Bogen $r\,d\varphi$ beschreibt, so ist

$$v = r\frac{d\varphi}{dt}$$

und daher das betrachtete Stück der Ablenkung in der Richtung von r gleich

$$\tfrac{1}{2} r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt^2.$$

Es bleibt daher nur noch die Ablenkung in der Richtung von r

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2} dt^2 - \tfrac{1}{2} r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt^2,$$

welche durch die in der Richtung von r wirkende Kraft $P \cos (P, r)$ in der Zeit dt hervorgerufen wird. Man hat daher nach (Nro. 73)

$$\tfrac{1}{2} P \cos (P, r)\, dt^2 = m \left[\tfrac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2} - \tfrac{1}{2} r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] dt^2,$$

welches die erste der abgeleiteten Formeln ist.

Aus dem Winkel φ wird in der Zeit dt, wenn man wieder bis zu den unendlich kleinen der zweiten Ordnung fortgeht

$$\varphi + \frac{d\varphi}{dt} dt + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} dt^2$$

und also der Weg der Masse in der Zeit dt rechtwinklich auf r

$$\left(r + \frac{dr}{dt} dt + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 r}{dt^2} dt^2\right)\left(\frac{d\varphi}{dt} dt + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} dt^2\right),$$

was mit Weglassung der unendlich kleinen höherer als der zweiten Ordnung den Weg

$$r \frac{d\varphi}{dt} dt + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} dt^2 + \tfrac{1}{2} r \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt^2$$

gibt. Hiervon wird

$$r \frac{d\varphi}{dt} dt = r\, d\varphi$$

vermöge der Geschwindigkeit zur Zeit t in der Richtung rechtwinklich auf r durchlaufen, also vermöge der Trägheit. Der andere Theil des Wegs ist dagegen die Ablenkung, welche die Kraft $P \cos (P, n)$ in der Zeit dt hervorbringt, und man hat daher nach (Nro. 73)

$$\tfrac{1}{2} P \cos (P, n)\, dt^2 = m \left[\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2} r \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] dt^2$$

und dieses ist die zweite der oben gegebenen Formeln in ihrer zuerst gefundenen Form.

74. Die Form, in welcher diese Gleichung unter (13) vorkommt, gibt noch zu folgendem Veranlassung. $r^2 d\varphi$ ist die doppelte Fläche, welche der Vector r in der Zeit dt beschreibt. Diese

doppelte Fläche durch dt dividirt, also auf die Zeiteinheit reducirt, nennt man die Flächengeschwindigkeit der Masse m in der Ebene r, φ; und ihre Ableitung nach t die Flächenbeschleunigung. Andererseits gibt man dem Produkte $r . P \cos(P, n)$, wie später noch weiter auseinander gesetzt werden wird, den Namen, das statische Moment der Kraft P für die Axe z, welche rechtwinklich auf r und n steht. Darnach lässt sich die zweite der obigen Gleichungen in den Worten aussprechen:

Das statische Moment der bewegenden Kraft ist gleich der Masse multiplicirt mit der Flächenbeschleunigung, diese in der Ebene genommen, welche zur Axe des statischen Momentes rechtwinklich ist.

Beispiel. Die Kraft, welche die Masse m bewegt, sei mk^2r und gehe durch die Axe der z, rechtwinklich auf diese, von der Masse gegen die Axe. Damit ist

$$P\cos(P,r) = -mk^2r;\ P\cos(P,n) = 0;\ P\cos(P,z) = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (13) gibt

$\frac{dz}{dt}$ constant, gleich der anfänglichen Geschwindigkeit in dieser Richtung, welche gegeben sein muss, wenn die Bewegung eine vollkommen bestimmte sein soll.

Die zweite der Gleichungen (13) lehrt

$$0 = \frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}, \text{ woraus}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c \tag{a}$$

ebenfalls constant. Die Flächengeschwindigkeit ist constant und

$$\int r^2 d\varphi = ct. \tag{b}$$

Das Integral links ist die doppelte Fläche, welche der Vector in der Zeit t beschreibt. Diese Fläche ist daher der Zeit proportional, und für gleiche Zeiten gleich gross.

Ist wie in (Nro. 71, Beispiel b) für $t = 0$ der Abstand r gleich x_0 und die Geschwindigkeit der Masse gleich v_0 unter dem Winkel α gegen die Verlängerung von x_0 geneigt, diesen Winkel nach der

Seite der positiven φ gerechnet, so ist für die auf $t=0$ folgende Zeit dt

$$r\,d\varphi = v_0 \sin\alpha\, dt$$

und daher

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = x_0 v_0 \sin\alpha = c,$$

wodurch die Flächengeschwindigkeit bestimmt ist.

Die erste Gleichung (13) wird

$$-k^2 r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

setzt man in diese mit (a) den Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$, so erhält man

$$-k^2 r = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3},$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $2\frac{dr}{dt}$, so lässt sie sich integriren. Die Constante bestimmt man aus

$$\frac{dr}{dt} = v_0 \cos\alpha$$

für $t=0$.

Die Aufgabe ist aber in Nro. 71, Beispiel b, schon auf einfacherem Wege behandelt; desshalb hier nur noch folgendes. Nennt man τ die ganze Umlaufszeit, so ist nach der früheren Behandlung

$$\tau = \frac{2\pi}{k}.$$

Sind a und b die beiden Halbaxen der elliptischen Bahn der Masse m, so gibt die Gleichung (b) für den ganzen Umlauf

$$2ab\pi = c\tau,$$

woraus also mit dem bereits bestimmten Werthe von c der Flächeninhalt der beschriebenen Ellipse

$$ab\pi = \frac{x_0 v_0 \pi \sin\alpha}{k}$$

wird.

75. Geht die bewegende Kraft durch einen bestimmten unbeweglichen Punkt, so nennt man die entstehende Bewegung eine Centralbewegung. Sie ist eine ebene Bewegung, die Bahn liegt in der Ebene durch die Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit und

durch den Punkt, durch welchen die Kraft immer geht. Nimmt man diesen Punkt als Ursprung der Polarcoordinaten r, φ, so gibt die zweite der Gleichungen (13, Nro. 72) unmittelbar

$$0 = m \frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt},$$

woraus die Flächengeschwindigkeit

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c^2$$

constant, und die in der Zeit t vom Vector r beschriebene Fläche der Zeit proportional. Die Constante bestimmt sich aus der Geschwindigkeit v_0, welche in einer gegebenen Entfernung r_0 stattfindet, nebst dem Winkel beider. Man findet

$$c^2 = v_0 r_0 \sin(v_0, r_0).$$

Hat man umgekehrt von einer ebenen Bewegung erkannt, dass der Vector von einem unveränderlichen Punkte aus nach dem bewegten Punkte gezogen in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, so folgt daraus

$$\frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = 0$$

und also mit der zweiten der Gleichungen (13)

$$P \cos(P, n) = 0,$$

oder die Componente der Kraft rechtwinklich auf den Vector ist Null, die Kraft selbst liegt also in der Linie des Vectors und geht somit immer durch den Ursprung des Vectors. Die Bewegung ist eine Centralbewegung. Das in der vorhergehenden Nummer behandelte Beispiel ist ein Beispiel einer Centralbewegung.

76. Der Satz vom Antriebe (Nro. 51) findet für die Componenten der Bewegung nach einer bestimmten Richtung statt. Es ist

$$P \cos(P, x) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

woraus

$$\int_0^t P \cos(P, x)\, dt = m \frac{dx}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$$

folgt. Die Zunahme der Grösse der Bewegung nach einer bestimmten Richtung ist gleich dem Antriebe der Componenten der Kraft in dieser Richtung, oder wie man auch sagt der Componenten des Antriebs in dieser Richtung.

Die Gleichung

$$P\cos(P,v) = m\frac{dv}{dt}$$

gibt ebenso

$$\int_0^t P\cos(P,v)\,dt = mv - mv_0 \tag{14}$$

wo v_0 die Geschwindigkeit der Masse zur Zeit Null ist. Der Antrieb in der Richtung der Bahn ist der Zunahme der Grösse der Bewegung gleich.

Ist die Componente der Kraft nach der Tangente an die Bahn constant, so nimmt die Geschwindigkeit mit der Zeit proportional zu.

77. Die zweite Gleichung (13 in Nro. 72) ist

$$rP\cos(P,n) = m\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt};$$

sie gibt das Integral

$$\int_0^t rP\cos(P,n)\,dt = m\left[r^2\frac{d\varphi}{dt} - \left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)_0\right]. \tag{15}$$

Das Integral links nennt man das Moment des Antriebs, das Product aus der Masse in die Flächengeschwindigkeit die Grösse der Flächenbewegung. Damit lässt sich obige Gleichung so aussprechen: Das Moment des Antriebs während der Zeit t ist gleich der in dieser Zeit erfolgenden Zunahme der Grösse der Flächenbewegung.

Weiss man z. B. von einer Bewegung, dass der Vector r proportional mit der Zeit wächst, und dass die rechtwinklich auf den Vector gerichtete Componente der Kraft constant ist, also etwa

$$r = at \text{ und } P\cos(P,n) = mb^2,$$

so gibt dieser Satz

$$\tfrac{1}{2}mb^2at^2 = a^2t^2\frac{d\varphi}{dt}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{a} = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ woraus}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}t,$$

wenn man $\varphi = 0$ für $t = 0$ nimmt.

Die Bewegung erfolgt also in einer archimedischen Spirale.

78. Der Satz von der Arbeit der Kraft. Die Arbeit der Kraft, während der Verschiebung des Angriffspunktes oder der bewegten Masse m durch das Element ds der Bahn ist (Nro. 29)

$$P\,ds\cos(P, ds).$$

Nun ist
$$P\cos(P, ds) = P\cos(P, v) = m\frac{dv}{dt}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$ds = v\,dt,$$

und integrirt, so erhält man

$$\int_{s_0}^{s} P\cos(P, ds)\,ds = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2, \tag{16}$$

wo s_0 und s auf der Bahn gemessene Abstände sind, und die Geschwindigkeiten der Masse in diesen Abständen mit v_0 und v bezeichnet sind.

Das Integral links ist die Summe der Arbeiten der bewegenden Kraft für alle Verschiebungen auf dem Wege s_0 bis s; die Gleichung (16) sagt:

Die Arbeit der Kraft auf dem Wege von s_0 bis s ist gleich der Zunahme der lebendigen Kraft der Masse auf diesem Wege.

Beispiel a. Bei einer mit der Geschwindigkeit v_0 hinausgeworfenen schweren Masse m ist die vertical abwärts gehende bewegende Kraft mg; zählt man die Ordinaten z von dem Ausgangspunkte der Masse aufwärts, so ist, wenn die Masse die Höhe z erreicht hat, die Arbeit der Kraft

$$-mgz$$

und nennt man die Geschwindigkeit an dieser Stelle v, nach dem Satze von der Arbeit

5 *

$$-mgz = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0{}^2 \text{ oder}$$
$$v^2 = v_0{}^2 - 2gz.$$

Werden also von demselben Orte aus beliebige schwere Massen unter beliebigen Winkeln mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 hinausgeworfen, so haben sie alle beim Durchgange durch dieselbe Horizontalebene die gleiche Geschwindigkeit v.

Beispiel b. Wird eine Masse m gegen einen Fixpunkt durch die Kraft mk^2r angezogen, wo k constant und r die Entfernung der Masse von dem Fixpunkte ist, so ist die Arbeit der Kraft

$$\int_{s_0}^{s} mk^2 r\cos(P, ds)\, ds = mk^2\int_{s_0}^{s} r\cos(r, ds)\, ds =$$
$$= -mk^2\int_{r_0}^{r} r\, dr = \tfrac{1}{2}mk^2(r_0{}^2 - r^2).$$

Ist also in der Entfernung r_0 die Geschwindigkeit der Masse gleich v_0 und gleich v in der Entfernung r vom Fixpunkte, so hat man

$$k^2(r_0{}^2 - r^2) = v^2 - v_0{}^2 \text{ und}$$
$$v^2 = v_0{}^2 + k^2(r_0{}^2 - r^2).$$

In derselben Entfernung r ist daher die Geschwindigkeit immer dieselbe.

Beispiel c. Wird die Masse m nach einem Fixpunkte mit einer Kraft gezogen, welche umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung von jenem Fixpunkte ist, oder bei der Entfernung r mit der Kraft

$$m\frac{k}{r^2},$$

so ergibt der Satz über die Arbeit die Gleichung

$$-k\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0{}^2 \text{ oder}$$
$$k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0{}^2.$$

Es hat also hier $v^2 - v_0{}^2$ immer dasselbe Zeichen wie $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}$, oder in grösserer Entfernung ist die Geschwindigkeit kleiner als in geringerer Entfernung von dem Fixpunkte. Kommt die Masse m aus

unendlicher Entfernung, indem sie von dort von der Ruhe ausgeht, so ist

$$v^2 = \frac{2k}{r} \text{ oder}$$

$\frac{mk}{r}$ ist die lebendige Kraft, welche die Masse m hierbei erhält. Weitere Folgerungen aus dieser Gleichung werden unten kommen.

79. Ist die Kraft nach einem unbeweglichen Punkte gerichtet, die Bewegung also eine Centralbewegung, und dabei die Kraft eine Function des Abstandes r der bewegten Masse m von jenem Fixpunkte gleich $m\varphi_r$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \pm m\int_{r_0}^{r}\varphi_r\, dr = \pm m(F_r - F_{r_0})$$

wo

$$\int\varphi_r\, dr \text{ durch } F_r$$

bezeichnet ist.

Für alle diese Bewegungen ist daher die Geschwindigkeit nur von der Entfernung der Masse von dem Centrum der Kraft, jenem Fixpunkte, abhängig, und immer dieselbe, so oft diese Entfernung dieselbe wird. Die Richtungen und eben damit die Bahnen kommen hierbei nicht in Betracht. Beispiele solcher Bewegungen sind die drei in der letzten Nummer behandelten, wenn man bei der ersten den Fixpunkt in unendlicher Entfernung denkt.

80. Zerlegt man die Kraft P nach den drei Coordinatenaxen in X, Y, Z, sind dx, dy, dz die Projectionen von ds, der Verschiebung der bewegten Masse, auf die drei Coordinatenaxen, so ist nach dem Satze (Nro. 31), dass die Arbeit der Resultirenden gleich der Summe der Arbeiten der Componenten ist

$$P\cos(P, ds)\, ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \text{ und daher}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (a)$$

Die Componenten der Kraft X, Y, Z kann man willkürlich annehmen und durch x, y, z und t ausdrücken; immer werden die Coordinaten x, y, z selbst Functionen von t sein, und man wird obige Gleichungen schreiben können

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^t \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) dt \qquad \text{(b)}$$

und wird in dieser Weise das Integral rechts als eine Function von t erhalten, welche man aber nicht immer durch x, y, z allein wird ausdrücken können. Im Allgemeinen wird daher die Geschwindigkeit v nicht allein von v_0 und der Lage der Masse m zur Zeit t abhängen, sondern auch von t selbst, oder von der Bahn, welche der Körper durchlaufen hat, und von der Zeit, welche er dazu gebraucht hat.

Sind X, Y, Z durch die Coordinaten x, y, z allein bestimmt, so kann

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

entweder das vollständige Differential einer Function $F_{x,y,z}$ sein, wenn x, y, z als von einander unabhängig betrachtet werden, oder nicht. Das erste ist bekanntlich der Fall, wenn

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx};\ \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx};\ \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dx}$$

ist, andernfalls nicht.

Im ersten Falle hat man

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_{x,y,z} - F_{x_0,y_0,z_0}$$

wo x_0, y_0, z_0 die Coordinaten sind, bei welchen die Masse m die Geschwindigkeit v_0 hat. In diesem Falle hängt daher die lebendige Kraft $\tfrac{1}{2}mv^2$ nur von der Geschwindigkeit v_0 bei x_0, y_0, z_0 und von der Lage der Masse m oder von x, y, z ab, nicht aber von der Bahn, welche die Masse m zwischen beiden Punkten durchlaufen hat. Geht die Masse unter der Wirkung dieser Kraft von dem Punkte x_0, y_0, z_0 mit der Geschwindigkeit v_0 in beliebiger Richtung ab, so erreicht sie beim Durchgang durch die Fläche

$$F_{x,y,z} = c$$

wo c eine Constante ist, immer dieselbe Geschwindigkeit v, welche durch

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = c - F_{x_0,y_0,z_0}$$

gegeben ist.

Ist dagegen $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Differential der als von einander unabhängig betrachteten x, y, z, so lässt

sich das Integral (a) erst dann bestimmen, wenn man zuerst die Bahn der Bewegung und damit die Abhängigkeit von x, y, z von einander oder von t bestimmt hat.

Hat man z. B.

$$X = -may; \quad Y = -mbx \quad \text{und} \quad Z = 0,$$

wobei a und b constant sein sollen, so ist

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

nur dann ein vollständiges Differential, wenn a = b ist, weil nur dann

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx} \quad \text{nämlich} = -ma.$$

Für b = a erhält man

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = -a\int(y\,dx + x\,dy) = -a[xy - x_0 y_0].$$

Wird also unter Voraussetzung dieser Kraft die Masse m von einem Punkte x_0, y_0 mit der Geschwindigkeit v_0 in beliebiger Richtung in der Ebene x, y hinausgeworfen, so erreicht sie in der gleichseitigen Hyperbel

$$xy = c$$

immer dieselbe Geschwindigkeit.

Ist b nicht gleich a, so muss man die Aufgabe in anderer Weise behandeln.

81. Die Kräfte, welche in der Natur vorkommen, sind meist nach bestimmten Punkten gerichtet, Anziehungs- oder Abstossungskräfte, und dabei Functionen der Entfernungen des bewegten Punktes von diesen Punkten.

Sind A, B, C . . . . solche Anziehungs- oder Abstossungsmittelpunkte, welche als unbewegt betrachtet werden; sind zur Zeit t die Entfernungen der bewegten Masse m von diesen Punkten

$$r, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3 \; \ldots\ldots$$

und

$$m\varphi_r, \quad m\varphi'_{r_1}, \quad m\varphi''_{r_2}, \quad m\varphi'''_{r_3} \; \ldots\ldots$$

die Kräfte, welche von diesen Kraftmittelpunkten aus auf die Masse m übergehen, und welche in den Richtungen r, r_1, r_2 . . . liegen, so ist die Arbeit dieser Kräfte bei einer Verschiebung der Masse um ds

$$m[\varphi_r\, dr + \varphi'_{r_1}\, dr_1 + \varphi''_{r_2}\, dr_2 + \varphi'''_{r_3}\, dr_3 + \ldots]$$

wo dr, dr_1, $dr_2 \ldots$ die Projectionen von ds auf die Richtungen r, r_1, $r_2 \ldots$ sind, und also

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0{}^2 = m \int (\varphi_r\, dr + \varphi'_{r_1}\, dr_1 + \varphi''_{r_2}\, dr_2 \ldots),$$

oder wenn man

$$\int \varphi_r\, dr = F_r$$

setzt,

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0{}^2 = m \Sigma [F_r - F_{r_0}],$$

wo die Summe auf die analogen Glieder für alle Anziehungspunkte auszudehnen ist.

Es ist also hier die lebendige Kraft der Masse m an irgend einer Stelle x, y, z vollständig bestimmt, wenn man sie für eine andere Stelle x_0, y_0, z_0 kennt. Aendert man die Richtung von v_0, ohne aber die Grösse oder x_0, y_0, z_0 zu ändern, so wird die Bahn eine andere werden, aber die Geschwindigkeit v dieselbe werden wie früher an einer Stelle, für welche

$$\Sigma F_r$$

denselben Werth hat, wie früher.

Aufgaben über die krummlinige Bewegung.

a. Die Bewegung eines schweren Körpers in einem widerstehenden Mittel.

82. Mit den Bezeichnungen in Nro. 56, wo der verticale Fall im widerstehenden Mittel untersucht ist, hat man die Componente der Kraft in der Richtung der Bewegung, wenn z die Richtung vertical abwärts bezeichnet

$$m g \cos(v, z) - m w$$

und die Componente normal zur Bahn, nach dem Krümmungsmittelpunkte

$$m g \sin(v, z).$$

Damit werden die Gleichungen (11, Nro. 69)

$$\frac{dv}{dt} = g \cos(v, z) - w \quad \text{und} \tag{a}$$

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \sin(v, z). \tag{b}$$

Setzt man in der letzten Gleichung für

$$\frac{1}{\varrho} \text{ seinen Werth } - \frac{d(v, z)}{ds},$$

so wird die letzte Gleichung

$$-v^2 \frac{d(v, z)}{ds} = g \sin(v, z), \tag{c}$$

oder wegen

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$-v \frac{d(v, z)}{dt} = g \sin(v, z), \tag{d}$$

welches die Formel (10) in Nro. 67 ist.

Die Gleichung (c) zeigt, weil v^2 immer positiv, und die rechte Seite auch immer positiv sein muss, dass der Winkel (v, z) immer abnimmt, wenn man längs der Bahn fortgeht. Dieses Abnehmen des Winkels (v, z) geht fort, so lange v, z noch nicht gleich Null ist, und nähert sich dieser Grenze, das heisst, die Bahnrichtung nähert sich als Grenze der Verticalen abwärts. Ist diese erreicht, so gibt die Gleichung (c)

$$\frac{d(v, z)}{ds} = 0$$

und nun ändert sich die Richtung der Bahn nicht mehr.

Es kann also kein Gesetz des Widerstandes geben, welches dem Körper eine rückgängige Bewegung in horizontalem Sinne vorschriebe.

Da hiernach $\frac{d(v, z)}{dt}$ immer negativ ist, so muss v selbst aus Gleichung (d) immer positiv bleiben. Sollte $v = 0$ werden, so kann das nur für

$$v, z = \pi$$

der Fall sein, wofür sich dieser Winkel (v, z) nicht ändert; es findet diess bei dem vertical aufwärts geworfenen Körper Statt.

Für einen schief aufwärts geworfenen Körper ist v, z anfänglich ein stumpfer Winkel. Damit ergibt die Gleichung (a), dass v anfänglich und jedenfalls so lange $v, z > \frac{\pi}{2}$ ist, abnimmt. Für $(v, z) = \frac{\pi}{2}$,

also für den Punkt der Bahn, in welchem die Tangente horizontal ist, oder im höchsten Punkte der Bahn ist

$$\frac{dv}{dt} = -w$$

und die Geschwindigkeit nimmt also noch immer ab, bis das nun positive $g\cos(v,z) = w$ wird. Hier, also in dem abwärts steigenden Theile der Bahn wird

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

und also die Geschwindigkeit ein Minimum. Von hier an nimmt die Geschwindigkeit zu, damit nimmt der Widersand w zu, und es fragt sich nun, ob w wieder gleich $g\cos(v,z)$ werden könne, in welchem Falle die Geschwindigkeit einen grössten Werth hätte und dann abnehmen würde. Schreibt man die Gleichung (a)

$$g\cos(v,z) = \frac{dv}{dt} + w,$$

so müsste für ein abnehmendes v zugleich w abnehmen, während das negative $\frac{dv}{dt}$ absolut genommen, zunehmen müsste; die erste Seite der Gleichung würde daher abnehmen, während die linke Seite, weil v, z hier ein spitzer Winkel ist, welcher nach und nach kleiner wird, zunimmt. Diess kann also nicht eintreten, und es kann in dem abwärtssteigenden Schenkel der Bahn kein Maximum der Geschwindigkeit auftreten, wohl aber wird die Geschwindigkeit immer mehr wachsen und sich der Grenze nähern, bei welcher der Luftwiderstand dem Gewichte des Körpers gleich ist. Dabei tritt dann, wenn zugleich die Bahn vertical geworden ist, eine gleichförmige Bewegung mit dieser Geschwindigkeit ein. Nur dort, wo kein Widerstand ist, wächst die Geschwindigkeit ins unendliche.

Ist v anfänglich sehr gross, so tritt die Bedingung des Minimums der Geschwindigkeit

$$g\cos(v,z) = w$$

nicht ein, bis die Bewegung vertical und gleichförmig geworden ist. Dort nimmt also die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Bewegung immer ab und nähert sich derselben Endgeschwindigkeit, wie oben, immerwährend.

Die Bahn hat eine in endlicher Entfernung liegende verticale Asymptote. Man hat nämlich aus (d)

$$\frac{d(v,z)}{dt} = -\frac{g\sin(v,z)}{v}$$

was mit

$$\frac{dx}{dt} = v\sin(v,z)$$

combinirt, in welcher Gleichung x die horizontale Abscisse des geworfenen Körpers zur Zeit t in der Ebene der Bahn bedeutet, gibt

$$\frac{d(v,z)}{dx} = -\frac{g}{v^2}, \text{ oder}$$

$$dx = -\frac{1}{g}v^2 d(v,z).$$

Ist nun α der anfängliche Werth von (v, z), und wie oben gefunden Null der Endwerth von (v, z), so wird

$$x = -\frac{1}{g}\int_\alpha^0 v^2\,d(v,z) = \frac{1}{g}\alpha . v_m^{\;2}$$

wo v_m eine Geschwindigkeit ist, welche zwischen den äussersten Werthen von v liegt, und also dem früheren zufolge endlich ist. Es ist also die Abscisse dieser verticalen Asymptote vom Ausgangspunkte des geworfenen Körpers eine endliche.

b. Die Bewegung einer Masse m, welche gegen einen Fixpunkt A durch eine Kraft angezogen wird, welche dem Quadrate der Entfernung Am umgekehrt proportional ist.

83. Die Bewegung ist eine Centralbewegung, deren Ebene durch die anfängliche Geschwindigkeit und durch den Anziehungsmittelpunkt A geht. Ist die Kraft bei der Entfernung r der Masse m vom Fixpunkte A gleich

$$m\frac{k}{r^2},$$

so gibt der Satz von der Arbeit (Nro. 78, Beispiel c) die Geschwindigkeit

$$v^2 = \frac{2k}{r} - \left(\frac{2k}{r_0} - v_0^{\;2}\right). \tag{a}$$

Hier ist $\frac{2k}{r}$ das Quadrat der Geschwindigkeit, welche die Masse m unter der Einwirkung der vorhandenen Kraft erlangt, wenn sie aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r gebracht ist, und $m\frac{k}{r}$ die erhaltene lebendige Kraft.

Da v^2 immer positiv sein muss, so kann r jeden absoluten Werth annehmen, wenn

$$\frac{2k}{r_0} - v_0^2$$

negativ ist, oder wenn die anfängliche lebendige Kraft $\frac{1}{2}mv_0^2$ grösser ist als $m\frac{k}{r_0}$, die lebendige Kraft, welche die Masse bei Annäherung aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r_0 erhalten hätte. Ist dagegen

$$v_0^2 < \frac{2k}{r_0},$$

so muss

$$\frac{2k}{r} \geqq \frac{2k}{r_0} - v_0^2$$

sein und also r nicht grösser als

$$\frac{2k}{\frac{2k}{r_0} - v_0^2}$$

werden.

Die Bewegung ist eine Centralbewegung um A, daher die Flächengeschwindigkeit constant. Setzt man den Winkel, den r zur Zeit t mit einer constanten Richtung Ax in der Ebene der Bewegung bildet, diesen von Ax weg in der Richtung der Bewegung gemessen gleich φ, so ist hiernach

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c^2, \tag{b}$$

wo c^2 die constante Flächengeschwindigkeit ist (Nro. 75).

Die Geschwindigkeit v hat nach r und rechtwinklich darauf die Componenten

$$\frac{dr}{dt} \text{ und } r\frac{d\varphi}{dt},$$

womit
$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{c^4}{r^2} \tag{c}$$
sich ergibt.

Aus (b) und (c) erhält man
$$\frac{v^2}{c^4}=\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{r^4d\varphi^2}$$
was in (a) substituirt, wenn man noch dort
$$\frac{2k}{r_0}-v_0{}^2=\pm h^2$$
setzt, gibt
$$c^4\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{r^4d\varphi^2}=\frac{2k}{r}\mp h^2,\text{ woraus}$$

$$d\varphi=\pm\frac{c^2dr}{r^2\sqrt{\frac{2kc}{r}\mp h^2-\frac{c^4}{r^2}}}=\pm\frac{\frac{c^2}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{k^2}{c^4}\mp h^2-\left(\frac{c^2}{r}-\frac{k}{c^2}\right)^2}},$$

Hier ist das obere Zeichen vor der Wurzel zu nehmen, so lange r zugleich mit φ wächst, andernfalls das untere. Der Uebergang findet dort statt, wo
$$\frac{dr}{d\varphi}=0$$
wird, oder also die Bahn den Vector r rechtwinklich durchschneidet, und ein Maximum oder Minimum der Entfernung von A erreicht ist. Diess findet statt, wenn
$$\frac{c^2}{r}-\frac{k}{c^2}=\pm\sqrt{\frac{k^2}{c^4}\mp h^2}\text{ oder}$$
$$r=\frac{c^2}{\frac{k}{c^2}\pm\sqrt{\frac{k^2}{c^4}\mp h^2}}$$
ist. Zu bemerken ist, dass die Wurzel jedenfalls reell sein muss, da ohne das gar kein Werth von r möglich wäre, für welchen $\frac{d\varphi}{dr}$ reell würde.

Der obigen Differentialgleichung entspricht
$$\frac{c^2}{r}-\frac{k}{c^2}=\sqrt{\frac{k^2}{c^4}\mp h^2}.\cos(\varphi-\gamma),$$

wo γ eine Constante ist, und zwar entspricht diese Gleichung beiden Zeichen der obigen Differentialgleichung, wenn man γ so bestimmt, dass für r gleich dem oben bezeichneten Ausgezeichneten Werth $\varphi-\gamma$ gleich Null oder π wird. Dann nämlich wird so lange $\varphi-\gamma$ zwischen 0 und π liegt r abnehmen, wenn $\varphi-\gamma$ zunimmt, was also dem untern Zeichen der obigen Gleichung entspricht; dagegen wird r zunehmen mit φ, so lange $\varphi-\gamma$ zwischen π und 2π liegt.

Aus dem gefundenen Integrale findet man

$$r=\frac{c^2}{\frac{k}{c^2}+\sqrt{\frac{k^2}{c^4}\mp h^2.\cos(\varphi-\gamma)}} \tag{d}$$

Setzt man hier

$$\sqrt{1\mp\frac{c^4h^2}{k^2}}=\varepsilon \text{ und } \frac{c^4}{k}=a(1-\varepsilon^2) \tag{e}$$

woraus

$$a=\pm\frac{k}{h^2}$$

folgt, so wird die obige Gleichung der Bahn

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\gamma)} \tag{f}$$

welches die Gleichung eines Kegelschnittes ist, und zwar einer Ellipse, wenn $\varepsilon<1$ ist, d. h. für das obere Zeichen, einer Parabel, wenn $\varepsilon=1$ ist und einer Hyperbel, wenn $\varepsilon>1$ ist.

Welche von diesen drei Kurven die Bahn ist, hängt somit davon ab, ob h^2 das $+$ oder $-$ Zeichen hat, oder ob es Null ist. Diess ist aber der Reihe nach der Fall, wenn

$$\frac{2k}{r_0}-v_0{}^2=\pm h^2$$

grösser oder kleiner als Null oder dieses hängt also nach dem früheren davon ab, ob die lebendige Kraft der Masse m in der Entfernung r_0 vom Anziehungspunkte kleiner, gleich oder grösser ist, als die, welche diese Masse durch die vorhandene Anziehungskraft bei der Anziehung aus unendlicher Ferne bis in die Entfernung r_0 erlangt hätte. Die Richtung der Geschwindigkeit v_0 kommt hierbei gar nicht in Betracht, wohl aber hat sie Einfluss auf die Excen-

tricität der Bahn ε, welche von der Flächengeschwindigkeit, oder von

$$c^2 = v_0 r_0 \sin(v_0 r_0)$$

abhängt.

Man sieht aus der gefundenen Gleichung der Bahn, dass der Anziehungsmittelpunkt der eine Brennpunkt des Kegelschnittes ist. Die eine Halbaxe der Linie ist

$$\frac{k}{h^2}$$

und zwar ist diess bei der Ellipse die halbe grosse Axe.

Für die Bewegung in einer Parabel muss $h^2 = 0$ werden; damit nimmt die obige Gleichung eine unbestimmte Form an. Man findet aber leicht direct

$$r = \frac{c^4}{k(1 + \cos[\varphi - \gamma])}. \tag{g}$$

Um noch die Coordinaten in Function der Zeit zu finden, kann man in (c) für v^2 seinen Werth aus (a) setzen, wodurch man

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} \mp h^2 - \frac{c^4}{r^2}$$

erhält, wobei, wenn man sich auf die elliptische Bewegung beschränkt, was für das Weitere geschehen soll, das obere Zeichen zu nehmen ist. Man könnte diese Gleichung wie oben behandeln, schlägt aber gewöhnlich folgenden Weg ein. Da r zwischen $a(1 - \varepsilon)$ und $a(1 + \varepsilon)$ liegt, so kann man setzen

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u) \tag{h}$$

wo u eine Hilfsgrösse ist, welche mit $\varphi - \gamma$ zugleich 0 wird und zugleich mit diesem π, und welche die Astronomen die excentrische Anomalie nennen, während sie dem oben gebrauchten Winkel $\varphi - \gamma$ den Namen der wahren Anomalie geben. Substituirt man diesen Werth, so erhält man

$$dt = a\sqrt{\frac{a}{k}}.(1 - e\cos u)\,du.$$

Das Integral dieser Gleichungen wird, wenn man $a\sqrt{\frac{a}{k^2}}$ mit $\frac{1}{n}$ bezeichnet

$$n t = u - \varepsilon \sin u \tag{k}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass t von dem Augenblicke an gezählt werde, in dem $u = 0$ ist, also die Masse m die kleinste Entfernung $a(1 - \varepsilon)$ von A hat.

Aus (k) findet man für irgend eine Zeit u, dann mit Hilfe von (h) r und darauf aus der Gleichung der Bahn den Winkel $\varphi - \gamma$.

Die ganze Umlaufszeit findet man aus der Gleichung (k) für $u = 2\pi$

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{k}}. \tag{l}$$

Man kann diese Umlaufszeit auch aus der Flächengeschwindigkeit finden; es ist nämlich die von dem Vector in der Zeit τ beschriebene Fläche gleich der ganzen Ellipse $= \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$; daher

$$2\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = c^2 \tau,$$

was mit den Gleichungen (e)

$$\tau = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{k}}$$

wie oben ergibt.

c. Die Kraft, welche die Planeten in ihren Bahnen erhält.

84. Aus den vorhandenen Beobachtungen der Planetenbewegungen hat Keppler die Gesetze bestimmt, nach welchen diese Bewegungen erfolgen; diese Keppler'schen Gesetze sind folgende:

1) Die Planeten beschreiben ebene Curven, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Sonne gehen, und die von den Planeten nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogenen Vectoren beschreiben Räume, welche für denselben Planeten der Zeit proportional sind.

2) Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Axen ihrer Bahnen.

Es sollen aus diesen Gesetzen die Kräfte bestimmt werden, welche die Planeten bewegen.

Das erste Gesetz zeigt unmittelbar, dass die Bewegung eines Planeten um den Sonnenmittelpunkt eine Centralbewegung ist (Nro. 75), und dass also die bewegende Kraft für jeden Planeten nach dem Sonnenmittelpunkt gerichtet ist.

Die Gleichung der Bahn ist in Polarcoordinaten r und φ, welche vom Sonnenmittelpunkte ausgehen

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Die bewegende Kraft liegt in der Richtung von r, wie wir oben gesehen haben. Diese Kraft muss, wenn m die Masse des Planeten ist, nach der ersten der Formeln (13 in Nro. 72)

$$m\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \tag{b}$$

sein, wobei noch

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c^2 \tag{c}$$

die constante Flächengeschwindigkeit ist. Die Gleichung (a) gibt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\varepsilon\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2\varepsilon\sin\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{c^2}{r^2}$$

$$= \frac{c^2\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}\sin\varphi \quad \text{und damit}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^4\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)r^2}.$$

Wird dieser Werth in den Ausdruck (b) der bewegenden Kraft substituirt, so erhält man für diese

$$m\left[\frac{c^4\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)r^2} - \frac{c^4}{r^3}\right] = -m\frac{c^4}{a(1-\varepsilon^2)r^2}. \tag{d}$$

Die Kraft wird negativ, weil sie nicht in die Verlängerung von r, sondern von dem Planeten gegen die Sonne gerichtet ist, eine Anziehungskraft der letztern; sie ist, wie man sieht, bei demselben Planeten umgekehrt proportional dem Quadrate seiner jeweiligen Entfernug von der Sonne.

Nennt man τ die Umlaufszeit des Planeten, so hat man, wie aus der Fläche der Ellipse sich ergibt (siehe die vorhergehende Aufgabe am Ende)

$$2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} = c^2\tau,$$

womit die bewegende Kraft (ohne Zeichen)

$$m.\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}.\frac{1}{r^2}$$

wird.

Setzt man diese Kraft, wie in der vorhergehenden Aufgabe gleich

$$m\frac{k}{r^2},$$

so ist

$$k=\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$$

und daher nach dem dritten Keppler'schen Gesetz für alle Planeten dieselbe Grösse. Die anziehende Kraft der Sonne ist daher für jeden Planeten

$$\frac{mk}{r^2}$$

und unterscheidet sich von einem zum andern nur durch die verschiedenen Massen der Planeten und ihre verschiedenen Entfernungen. Für die Masseneinheit reducirt auf gleiche Entfernungen ist die Anziehungskraft für alle Planeten gleich gross.

d. Eine Masse m bewegt sich in einem Kreise vom Halbmesser a; sie wird durch eine Kraft gegen einen Punkt der Peripherie angezogen; wie gross ist diese Kraft?

85. Zählt man die Polarcoordinaten r und φ von dem Anziehungspunkte und der durch diesen gehenden Berührungslinie des Kreises, so ist die Gleichung des Kreises

$$r=2a\sin\varphi.$$

Die Bewegung ist eine Centralbewegung, daher die Flächengeschwindigkeit constant; sie sei c^2. Damit ist dann

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=c^2 \text{ und}$$

$$\frac{dr}{dt}=2a\cos\varphi.\frac{c^2}{r^2}=\frac{c^2}{2a}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^2},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{c^2}{2a}\,\frac{\sin\varphi^2+2\cos\varphi^2}{\sin\varphi^3}.\frac{c^2}{r^2}$$

$$=-\frac{4a^2c^4}{r^5}(1+\cos\varphi^2).$$

Die Kraft liegt der Richtung r entgegen und ist (Nro. 75)

$$-m\left[\frac{d^2 r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=$$

$$=m\left[\frac{4a^2c^4}{r^5}(1+\cos\varphi^2)+\frac{c^4}{r^3}\right]$$

$$=m.\frac{c^4}{r^5}[4a^2(1+\cos\varphi^2)+r^2]$$

$$=m.\frac{8a^2c^4}{r^5}.$$

Die Kraft ist also der fünften Potenz der Entfernung der Masse vom Anziehungspunkte umgekehrt proportional.

Ist die Geschwindigkeit für $\varphi=\frac{\pi}{2}$, wo $r=2a$ ist, gleich v_0, so hat man $2av_0=c^2$.

Die Gleichung

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=c^2$$

gibt

$$c^2 dt=4a^2\sin\varphi^2 d\varphi\text{, woraus}$$

$$c^2 t=a^2[2\varphi-2\pi-\sin 2\varphi],$$

wenn man t von dem Zeitpunkte zählt, in welchem die Masse durch den von A entferntesten Punkt seiner Bahn geht. Für die Zeit, welche verfliesst, bis die Masse nach dem Anziehungspunkt gekommen ist, erhält man für $\varphi=2\pi$

$$t_1=\frac{a\pi}{v_0};$$

dort würde aber die Geschwindigkeit unendlich gross.

e. Eine Masse m bewegt sich in einer gegebenen Curve relativ gegen einen Punkt B, welcher selbst wieder eine zweite gegebene Curve durchlauft. Beide Curven werden nach gegebenen Gesetzen durchlaufen. Die Kraft zu bestimmen, welche die Masse m bewegt.

86. Nimmt man ein rechtwinkliches Coordinatensystem Ax, Ay, Az an, legt man durch den bewegten Punkt B ein zweites Bx′, By′, Bz′ parallel zu dem ersten, und setzt man die Coordinaten der Masse m zur Zeit t bezüglich auf das erste Coordinatensystem x, y, z; bezüglich auf das zweite x′, y′, z′ und zugleich die Coordinaten von B gleich a, b, c, so ist

$$x = x' + a;\ y = y' + b;\ z = z' + c$$

und also

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2x'}{dt^2} + m\frac{d^2a}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2z'}{dt^2} + m\frac{d^2b}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d^2z'}{dt^2} + m\frac{d^2c}{dt^2}.$$

$m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$ und $m\frac{d^2z}{dt^2}$ sind die Componenten der bewegenden Kraft nach den Coordinatenaxen. Diese kann man zerlegen je in $m\frac{d^2x'}{dt^2}$ und $m\frac{d^2a}{dt^2}$ und so für die andern Axen. Setzt man die Kräfte $m\frac{d^2x'}{dt^2}$, $m\frac{d^2y'}{dt^2}$, $m\frac{d^2z'}{dt^2}$ zusammen, so erhält man die Kraft, welche der Masse m ihre relative Bewegung um B ertheilt, wie wenn B unbeweglich wäre.

Zu dieser Kraft kommt dann noch die zweite, deren Componenten $m\frac{d^2a}{dt^2}$, $m\frac{d^2b}{dt^2}$, $m\frac{d^2c}{dt^2}$ sind, welche einer Masse m in B die Bewegung von B ertheilen würde, und welche dieser letzten Kraft parallel ist.

Bewegt sich z. B. B gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser a, und um diesen Punkt, relativ gegen ihn die Masse m ebenfalls gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser r; ist

$a\frac{d\varphi}{dt}$ die constante Geschwindigkeit des Punktes B und

$r\frac{d\psi}{dt}$ die constante relative Geschwindigkeit der Masse m gegen die durch B gelegte Axe Bx', so wird diese Bewegung hervorgerufen durch das Zusammenwirken zweier Kräfte, von welchen die eine

$$mr\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \text{ ist, welche}$$

die Richtung mB hat, während die andere

$$ma\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

ist und parallel mit BA geht.

Die unfreie Bewegung eines Punktes.

87. Ist ein materieller Punkt durch eine Bahn, aus welcher er nicht heraustreten kann, gehindert, frei den ihn bewegenden Kräften zu folgen, so sagt man, seine Bewegung sei eine unfreie. Eine solche ist z. B. die eines schweren Körpers der auf einer schiefen Ebene hinabgleitet; eines schweren Körpers, der an einem Faden aufgehängt sich bewegt, der dabei durch den Faden gezwungen ist, sich in einer Kugelfläche zu bewegen, deren Halbmesser die Länge des Fadens hat.

Von der unfreien Bewegung wird man zu einer freien Bewegung übergehen, wenn man die vorgeschriebene Bahn wegnimmt, und dafür in jedem Zeitpunkte eine weitere Kraft auf den Körper einwirken lässt, welche die Wirkung der Bahn ersetzt. Damit haben wir dann zwei Kräfte, welche auf den bewegten Punkt wirken, erstlich die bewegende Kraft und zweitens den die Bahn ersetzenden Widerstand der Bahn. Der letzte muss so bestimmt werden, dass diese beiden Kräfte zusammen ohne Bahn dieselbe Bewegung als freie hervorrufen, welche wir als unfreie beim Vorhandensein der Bahn durch die bewegende Kraft hervorgebracht sehen.

Setzt man die beiden Kräfte, die bewegende Kraft und den Widerstand der Bahn zu einer Kraft zusammen, so wird diese für sich allein wieder dieselbe Wirkung haben, wie die bewegende Kraft und die widerstehende Bahn. Diese Kraft, also die Resultirende aus der bewegenden Kraft und dem Widerstande der Bahn nennt man die Effectivkraft.

88. Ist die Bewegung bekannt, so lässt sich diese Effectivkraft bestimmen. Ist z. B. die Bewegung auf drei aufeinander rechtwinkliche Coordinatenaxen bezogen, und sind x, y, z die Coordinaten des bewegten Punktes zur Zeit t und ist m seine Masse, so sind die Componenten der Effectivkraft nach den drei Coordinatenaxen

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Sind ferner

$$P_x,\quad P_y,\quad P_z$$

$\sin\alpha - \mu\cos\alpha$ negativ, so nimmt die Geschwindigkeit ab und wird Null für

$$v_0 = g\,t(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Dort bleibt dann der Körper liegen, und fängt nicht etwa eine Bewegung nach oben an, da die Reibung nur ein Widerstand gegen eine bestehende Bewegung ist, nicht aber selbst Bewegung hervorbringen kann.

Bewegt sich der Körper aufwärts, und sind die x in der Linie des stärksten Falls nach oben gezählt, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(-\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \text{(e)}$$

woraus die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - g\,t(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \qquad \text{(f)}$$

folgt, wo v_0 die Geschwindigkeit für $t = 0$ ist. Für

$$v_0 = g\,t(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

wird die Geschwindigkeit Null, und von da an bleibt der Körper entweder liegen oder er fängt an abwärts zu sinken, für welche Bewegung die Gleichung (d) gilt. Das erste findet statt, wenn $\mu\cos\alpha \overset{=}{>} \sin a$, wie vorhin gezeigt wurde.

Ist die anfängliche Geschwindigkeit Null, so bleibt der Körper in Ruhe, so oft

$$\mu\cos\alpha \overset{=}{>} \sin\alpha \text{ ist, so oft}$$

$$\mu \overset{=}{>} \tan\alpha \text{ ist.}$$

Den Winkel α, dessen Tangente der Reibungscoefficient gleich ist, bei dem also ein ruhender Körper eben noch nicht anfängt herabzugleiten, nennt man auch den Ruhewinkel.

Hat die Masse m eine Anfangsgeschwindigkeit, welche nicht in der Richtung der Axe x liegt, so wird die Bewegung in der Ebene

$$z = 0$$

erfolgen. Von den Bewegungsgleichungen bestimmt die letzte auch hier den Widerstand der schiefen Ebene normal zu ihr

$$N_z = -m\,g\cos\alpha.$$

Findet gleitende Reibung statt, so ist der Widerstand der Bahn tangentiell an sie gleich dem Normaldrucke $m\,g\cos\alpha$ multi-

plicirt mit dem Reibungscoefficienten, und liegt in der Richtung der Berührungslinie an die Bahncurve der Bewegung entgegen. Bezeichnet man daher mit d s ein Element der Bahn bei x, y, so ist

$$N_x = -\mu m g \cos\alpha . \frac{dx}{ds} \text{ und } N_y = -\mu m g \cos\alpha . \frac{dy}{ds},$$

wodurch die Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m g \sin\alpha - \mu m g \cos\alpha \frac{dx}{dt}$$

und

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu m g \cos a \frac{dy}{ds}$$

vollkommen bestimmt werden.

Ist μ gleich Null, findet also keine Reibung statt, so geschieht die Bewegung in einer Parabel, deren Axe der Axe der x parallel ist.

89. Bei jeder freien Bewegung liegt die bewegende Kraft in der Osculationsebene der Bahn, und lässt sich daher in zwei Componenten nach der Tangente an die Bahn und nach dem Krümmungsmittelpunkte zerlegen. Dasselbe gilt für die Effectivkraft bei der unfreien Bewegung; ist diese E und v die Geschwindigkeit des Mobils, so ist (11 pag. 51)

$$E \cos(E, v) = m \frac{dv}{dt},$$

$$E \sin(E, v) = m \frac{v^2}{\varrho}.$$

Zerlegt man nun die bewegende Kraft P und den Widerstand N der Bahn nach den Richtungen v, durch den Krümmungsmittelpunkt und rechtwinklich auf beide nach n, so hat man, weil E die Resultirende von P und N ist,

$$\begin{aligned} E \cos(E, v) &= P \cos(P, v) + N \cos(N, v) = m \frac{dv}{dt}, \\ E \sin(E, v) &= P \cos(P, \varrho) + N \cos(N, \varrho) = m \frac{v^2}{\varrho}, \qquad (18) \\ 0 &= P \cos(P, n) + N \cos(N, n) = 0. \end{aligned}$$

Hier sind N cos (N, ϱ) und N cos (N, n) die Componenten des Normalwiderstandes der Bahn, und ebenso P cos (P, ϱ) und

$P \cos(P, n)$ die Componenten der bewegenden Kraft normal auf die Bahn. Setzt man diese beiden Componenten von N und ebenso diese beiden Componenten von P zusammen zu dem normalen Widerstande N_1 und der normalen Kraft P_1, so hat man den normalen Widerstand N_1 gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aus P_1 und der Kraft $-m\frac{v^2}{\varrho}$ in der Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt oder also der Kraft

$$+m\frac{v^2}{\varrho}$$

in der Richtung des verlängerten Krümmungshalbmessers. Diese Kraft, die entgegengesetzte der Centripetalkraft nennt man die Centrifugalkraft. Sie entsteht dadurch, dass die Masse m vermöge der Trägheit nach der Tangente an die Bahn fortgehen will, und daher dem Fortgehen auf der gekrümmten Bahn mit einer Kraft widerstrebt, welche der hierzu erforderlichen Centripetalkraft gleich aber entgegengesetzt ist.

Ist etwa Reibung bei der Bewegung vorhanden, so ist

$$N \cos(N, v) = -\mu N_1,$$

wo für N_1 der absolute Werth zu nehmen ist. Ist dagegen die Bahn vollkommen glatt, so ist

$$N \cos(N, v) = 0.$$

90. Die Gleichungen (18) setzen voraus, dass die Bahn eine vollständig vorgeschriebene ist; für die Bewegung auf einer Fläche ist diess nur theilweise der Fall, und hier wird die Bahn einen Widerstand rechtwinklich auf die Fläche und tangentiell der Richtung der Bewegung entgegen leisten können. Es muss also hier die Resultirende aus

$$P \cos(P, \varrho) - m\frac{v^2}{\varrho} \text{ und } P \cos(P, n)$$

rechtwinklich auf der Fläche, und zwar wenn diess die Oberfläche eines festen Körpers ist, in diesen gerichtet sein, während der Widerstand der Bahn N_1 rechtwinklich auf die Fläche nach aussen gerichtet sein muss. Diess gibt eine weitere Bedingungsgleichung an, welche mit den drei Bewegungsgleichungen (18) und dem Verhältnisse, das die Besonderheit der Bahnfläche zwischen $N \cos(N, v)$

und N_t einführt die Bewegung und den Widerstand N vollständig bestimmt.

Beschreibt z. B. ein schwerer Körper von der Masse m in einer hohlen Kugelschale vom Halbmesser l einen horizontalen Kreis vom Halbmesser a mit der Geschwindigkeit v, so ist der Krümmungshalbmesser der Bahn gleich a, und weil die bewegende Kraft m g vertical ist,

$$P\cos(P,\varrho)=0;\ P\cos(P,n)=m g.$$

Die Resultirende aus

$$-\frac{m v^2}{\varrho} \text{ und } m g$$

muss daher hier rechtwinklich auf die Kugelschale und zwar in der Verlängerung des Halbmessers l der Kugel liegen. Nennt man l die Richtung des nach m gezogenen Halbmessers, so muss hierzu

$$-\frac{m v^2}{\varrho}\sin(\varrho,l)+m g\sin(g,l)=0$$

sein, oder
$$\frac{v^2}{a}\cdot\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l}=g\frac{a}{l} \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{g}=\frac{a^2}{\sqrt{l^2-a^2}} \text{ sein.}$$

Der Normaldruck auf die Kugelschale wird

$$-\frac{m v^2}{\varrho}\cos(\varrho,l)+m g\cos(g,l)=\frac{m v^2}{a}\cdot\frac{a}{l}+m g\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l}=$$

$$=m\left[\frac{v^2}{l}+\frac{g\sqrt{l^2-a^2}}{l}\right]=m g\frac{l}{\sqrt{l^2-a^2}}.$$

91. Ist eine bewegende Kraft nicht vorhanden, oder ist sie selbst tangentiell an die Bahn, wie z. B. der Widerstand des Mittels, in welchem sich der Körper bewegt, so ist der normale Widerstand der Bahn gleich

$$\frac{m v^2}{\varrho}$$

und liegt daher in der Osculationsebene der Bahn selbst; diese Osculationsebene wird daher hier immer rechtwinklich auf der Fläche sein, in welcher die Bewegung erfolgen muss, und die Bahn wird

daher die kürzeste Linie auf dieser Fläche zwischen zweien ihrer Punkte sein.

92. Der Druck des bewegten Körpers auf die Bahn wird dem Widerstande der Bahn gleich und entgegengesetzt sein. Man erhält daher die Componenten dieses Drucks, wenn man $-N$ für N in obigen Formeln setzt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} N\cos(N,v) &= P\cos(P,v) - m\frac{dv}{dt}, \\ N\cos(N,\varrho) &= P\cos(P,\varrho) - m\frac{v^2}{\varrho}, \\ N\cos(N,n) &= P\cos(P,n). \end{aligned} \tag{19}$$

Die dritte Gleichung sagt, dass der Druck auf die Bahn rechtwinklich zur Osculationsebene gleich der Componenten der bewegenden Kraft in dieser Richtung ist.

Die zweite Gleichung gibt den Druck, welchen die Bahn in der Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt erleidet; dieser Druck muss, damit der bewegte Körper an der Fläche oder in der vorgeschriebenen Bahn bleibt, stets gegen diese gerichtet sein; ist er Null, so erleidet die Bahn in dieser Richtung keinen Druck; ist er von der Bahn weg gerichtet, so ist kein Hinderniss vorhanden, welches das Weggehen des Körpers von der Fläche oder aus der Curve nicht erlaubte.

Geht der Körper auf der convexen Seite der Fläche oder der Curve, in welcher er bleiben soll, so geht ϱ nach der concaven Seite und $N\cos(N,\varrho)$ muss daher positiv sein, wenn der Körper an der Fläche oder in der Curve bleiben soll; es muss daher $P\cos(P,\varrho)$ positiv und grösser als die Centrifugalkraft $m\frac{v^2}{\varrho}$ sein.

Bewegt sich dagegen der Körper auf der concaven Seite, so geht ϱ von der Bahn weg, und es muss also das oben bestimmte $N\cos(N,\varrho)$ negativ sein, wenn der Körper in der Bahn bleiben soll, oder es muss

$$m\frac{v^2}{\varrho} - P\cos(P,\varrho)$$

positiv sein, was immer der Fall ist, wenn P mit dem nach dem Krümmungsmittelpunkt gezogenen ϱ einen stumpfen Winkel bildet,

also der Druck der bewegenden Kraft eine Componente in der Verlängerung von ϱ hat. Ist aber P, ϱ ein spitzer Winkel, so muss damit der Körper an der Fläche oder in der gegebenen Curve bleibt, die Centrifugalkraft grösser sein, als die Componente $P \cos(P, \varrho)$.

Der Druck in der Richtung der Bahn selbst ist gleich dem Druck der bewegenden Kraft in dieser Richtung, weniger der Kraft, welche zur Beschleunigung des Körpers in dieser Richtung verwendet wird, oder die Componente der bewegenden Kraft nach der Richtung der Bewegung wird zum Theil zur Beschleunigung in dieser Richtung, zum Theil zur Ueberwindung des tangentiellen Bahnwiderstandes verwendet.

93. Der Satz von der Arbeit (Nro. 78) gibt hier für die Effectivkraft E, für welche die Bewegung eine freie ist

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0{}^2 = \int_{s_0}^{s} E \cos(E, ds)\, ds.$$

Da aber die Arbeit der Effectivkraft gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten ist, so hat man, weil die Componenten des Widerstandes der Bahn $N \cos(N, \varrho)$ und $N \cos(N, n)$ rechtwinklich auf der Bahn oder ds stehen, und ihre Arbeiten also Null sind,

$$E \cos(E, ds)\, ds = P \cos(P, v)\, ds + N \cos(N, v)\, ds$$

und also

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0{}^2 = \int_{s_0}^{s} P \cos(P, v)\, ds + \int_{s_0}^{s} N \cos(N, v)\, ds.$$

Für eine vollkommen glatte Bahn ist kein tangentieller Widerstand vorhanden und also das letzte Glied gleich Null. In diesem Falle findet daher der Satz von der Arbeit, wie er in Nro. 78 aufgestellt wurde, mit seinen Folgerungen statt, ohne dass man hierbei den Widerstand der Bahn irgendwie zu berücksichtigen hat.

Ist dagegen ein tangentieller Widerstand vorhanden, z. B. gleitende Reibung, so ist

$$N \cos(N, v) = \mu N_1$$

wo N_1 der Normaldruck auf die Bahn und μ der Reibungscoefficient ist; und

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} P\cos(P,v)\,ds - \int_{s_0}^{s} \mu N_1\,ds. \tag{20}$$

Hier ist also die Arbeit der bewegenden Kraft auf dem Wege von s_0 bis s gleich der Arbeit, welche zur Ueberwindung der Reibung erfordert wird, mehr der gewonnenen lebendigen Kraft der Masse m. Hier lässt sich aber die Geschwindigkeit nicht mehr unmittelbar durch obige Gleichung bestimmen, weil N_1 von der Centrifugalkraft und damit von der Geschwindigkeit abhängt.

Bewegt sich eine schwere Masse m ohne Reibung auf einer beliebigen Fläche; ist v_0 ihre Geschwindigkeit bei der vertical abwärts gemessenen Ordinate z_0 und v bei der Ordinate z, so hat man

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = mg(z - z_0) \quad \text{oder}$$
$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0).$$

Ist Reibung vorhanden, so wird die Aufgabe viel verwickelter, und der Satz von der Arbeit gibt die Geschwindigkeit nicht unmittelbar; bewegt sich die Masse in einem verticalen Kreise vom Halbmesser r, und zwar auf der obern Hälfte, auf der convexen Seite, so ist bei einer Lage der Masse m, welche vom Scheitel um den Bogen φ wegliegt, der Druck normal auf die Bahn

$$N_1 = mg\cos\varphi - m\frac{v^2}{r},$$

womit obige Gleichung wird

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = g(z - z_0) - \frac{\mu}{r}\int_{s_0}^{s} v^2\,ds,$$

mit welcher die Geschwindigkeit ohne weitere Untersuchung der Bewegung nicht gegeben ist.

94. Gleichgewicht findet statt, wenn für jede unendlich kleine Verschiebung in der Bahnfläche keine Beschleunigung, also keine Zunahme der lebendigen Kraft eintritt, und wenn die bewegende Kraft nicht dahin strebt, die angegriffene Masse von der Bahnfläche nach der freien Seite hin zu führen, wenn eine solche vorhanden ist.

Für die Verschiebung in der Bahnfläche gibt diess die Bedingung des Gleichgewichtes

$$0 = P\cos(P, ds)\,ds + N\cos(N, ds)\,ds.$$

Ist ein tangentialer Widerstand nicht vorhanden, so wird diese Gleichung

$$0 = P\cos(P, ds)\,ds.$$

Ist die vorgeschriebene Bahn von der Art, dass eine Verschiebung nur in einer Curve möglich, wenn sich etwa die Masse m in einer Röhre bewegen muss, so genügt die einzige Verschiebung nach einem Elemente ds dieser Curve, um zu sehen, ob Gleichgewicht vorhanden ist. Diess ist der Fall, wenn die Arbeit für diese Verschiebung Null ist.

Hat man eine Fläche, in welcher sich die Masse bewegen muss, und aus welcher sie nach keiner Seite hin austreten kann, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn für zwei gegen einander geneigte Verschiebungen ds in dieser Fläche die Arbeit der Kraft gleich Null ist; die Kraft P oder die Resultirende aus den bewegenden Kräften steht dann normal auf dieser Fläche (Nro. 32).

Ist endlich die Bahn durch eine Fläche vorgeschrieben, aus welcher die Masse nach einer Seite hin austreten kann, nicht aber nach der andern, so kommt zu diesen beiden Bedingungen noch die dritte, dass die Masse durch die Kraft P nicht nach der freien Seite der Bahnfläche getrieben wird. Da die Kraft P nach den Bedingungen des vorhergehenden Falls normal auf der Fläche steht, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn für eine Verschiebung ds nach der freien Seite hin der Winkel (P, ds) ein stumpfer, die Arbeit

$$P\cos(P, ds)\,ds$$

also negativ ist.

Man kann also sagen: Kräfte sind an einem Punkte im Gleichgewichte, wenn sie bei keiner zulässigen unendlich kleinen Verschiebung eine positive Arbeit geben.

Ist dagegen ein tangentialer Widerstand, wie Reibung, vorhanden, so bleiben die beiden ersten Fälle ungeändert, wenn man zu den bewegenden Kräften noch diesen tangentialen Widerstand hinzunimmt; die Resultirende aus den bewegenden Kräften und diesem tangentialen Widerstande muss fürs Gleichgewicht normal auf der Bahnfläche stehen. Bei dem dritten Falle wird aber bei der Verschiebung aus der Bahnfläche hinaus kein Widerstand der Bahn-

entgegenwirken, und dort wird daher der obige Satz nicht mehr richtig sein; wohl aber wird für eine Verschiebung normal zur Bahnfläche die Arbeit der bewegenden Kräfte negativ sein müssen, wenn diese die Masse gegen die Bahn drücken sollen, was fürs Gleichgewicht nothwendig ist. Man kann also hier den Satz aufstellen, dass für drei auf einander rechtwinkliche, zulässige Verschiebungen, von welchen nothwendig zwei in der Fläche liegen, die Summen der Arbeiten der bewegenden Kräfte und des Bahnwiderstandes gegen diese Verschiebungen nicht positiv werden dürfen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll.

Für die Ruhe der betrachteten Masse ist nur nothwendig, dass bei den Verschiebungen in der Bahnfläche die Arbeit des Widerstandes, der immer diesen Verschiebungen entgegengesetzt, stets eine negative Arbeit gibt, überwiegt über die Arbeit der bewegenden Kraft, wozu noch die Bedingung kommt, dass diese die Masse nicht von der Bahnfläche wegtreibt. Für zwei direct entgegengesetzte Verschiebungen in der Bahnfläche wird $P \cos (P, ds)\, ds$ einmal positiv und einmal negativ; ist daher

$$P \cos (P, ds)\, ds + N \cos (N, ds)\, ds$$

für beide negativ, so wird die Masse unter dem Einflusse dieser Kräfte und des tangentialen Bahnwiderstandes in Ruhe bleiben, da der überwiegende Widerstand keine Bewegung hervorbringt. Die dritte Bedingung bleibt $P \cos (P, ds)\, ds$ negativ für eine Verschiebung ds normal zur Bahnfläche. Man kann also sagen, Kräfte ertheilen einer ruhenden Masse, die aus einer Fläche nur nach einer Seite austreten kann, keine Bewegung mit, wenn die Summen ihrer Arbeiten und der Arbeit des Bahnwiderstandes für jede unendlich kleine Verschiebung in der Fläche und für eine Verschiebung nach der freien Seite der Fläche hin normal auf diese nie positiv werden.

Beispiel. Auf einer schiefen Ebene mit der Neigung α gegen den Horizont liegt eine schwere Masse m; auf sie wirkt eine Kraft P unter dem Winkel β gegen den Horizont, nach derselben Seite, wie α gemessen. Welches sind die Bedingungen des Gleichgewichts?

Ist die Bahn vollkommen glatt, ohne Reibung, so hat man für eine Verschiebung ds, welche mit dem Horizonte den Winkel γ

bildet, für jede zulässige Verschiebung $\gamma > \alpha$ und $< 180^\circ + \alpha$. Für eine solche Verschiebung ist die Summe der Arbeiten

$$P\cos(\beta-\gamma)\,ds + mg\cos(90^\circ+\gamma)\,ds,$$

und daher die Bedingung des Gleichgewichtes

$$P\cos(\beta-\gamma) - mg\sin\gamma \overline{\overline{<}} 0,$$

woraus

$$\frac{P\cos\beta}{mg - P\sin\beta} \overline{\overline{<}} \tan\gamma$$

sich ergibt, so lange γ zwischen 0 und 90° liegt, während von hier bis 270° die Bedingung, wegen der Division mit dem hier negativen $\cos\gamma$

$$\frac{P\cos\beta}{mg - P\sin\beta} \overline{\overline{>}} \tan\gamma$$

gilt.

Der ersten Bedingung wird, da hier $\tan\alpha$ der kleinste Werth von γ ist, entsprochen durch

$$\frac{P\cos\beta}{mg - P\sin\beta} = \tan\alpha, \text{ woraus}$$

$$P\cos(\beta-\alpha) = mg\sin\alpha \text{ sich ergibt.}$$

Der zweiten Bedingung, welche von $\gamma = 90^\circ$ bis $\gamma = 180^\circ + \alpha$ gilt, ist aber hierdurch eben so entsprochen, so lange, was bisher vorausgesetzt wurde, der Ausdruck links positiv ist, da der grösste Werth von $\tan\gamma$ in diesem Raume $\tan\alpha$ ist.

Es ist hier vorausgesetzt, dass $P\sin\beta < mg$ sei, was immer der Fall sein muss, da für $P\sin\beta = mg$ die Masse m von der Kraft $P\sin\beta$ getragen wird und nicht mehr auf die Bahn drückt.

Aufgaben über die unfreie Bewegung.

a. Auf einer verticalen festen Curve gleitet ohne Reibung ein schwerer Körper herab; wo verlässt er die Curve?

95. Der Druck auf die Bahn ist, wenn m die Masse des Körpers ist, und z vertical abwärts geht, ϱ der Krümmungshalbmesser bei der Ordinate z ist

$$mg\cos(z,\varrho) - m\frac{v^2}{\varrho}.$$

Die Geschwindigkeit bestimmt der Satz von der Arbeit,

$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(z - z_0) = 2g(h + z),$$

wo v_0 die Geschwindigkeit in der Tiefe z_0 ist und

$$v_0{}^2 - 2gz_0 = 2gh$$

gesetzt ist. Aus beiden Gleichungen folgt

$$\varrho \cos(z, \varrho) = 2(h + z)$$

für den Ort, in welchem der Druck Null wird, und an welchem, vorausgesetzt dass die Curve hier convex nach oben ist, der Körper die Bahn verlässt. Der Ort liegt also dort, wo die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers der doppelten Geschwindigkeitshöhe gleich ist. Trägt man also in dem zu untersuchenden Punkte M der Curve die Geschwindigkeitshöhe $h + z$ vertical aufwärts, und zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Horizontallinie CD; zieht man ferner in M eine Normale zur Curve, welche die Linie CD in E durchschneidet; so ist $2 \times EM$ die Grösse, welche der Krümmungshalbmesser haben müsste, wenn an dieser Stelle die Bahn verlassen werden sollte; ist der Krümmungshalbmesser in M grösser als $2 . EM$, so verlässt der Körper die Bahn hier nicht; ist er kleiner als $2 . EM$, so hat der Körper die Bahn schon früher verlassen.

Ist die Bahn diejenige Parabel, welche der Körper mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit frei durchlauft, so ist die Linie CD die Directrix dieser Bahn und $2 . EM$ der Krümmungshalbmesser derselben. Diese Bahn erleidet in keinem ihrer Punkte einen Druck durch das Herabgleiten des schweren Körpers. Man kann die widerstehende Bahn wegnehmen, ohne dass dadurch die Bewegung geändert wird.

b. Bewegung eines schweren Körpers in einem verticalen Kreise, vom Halbmesser l. Das einfache Pendel.

96. Nimmt man als Ursprung der in der Verticalebene des Kreises liegenden Coordinaten x und z den Mittelpunkt des Kreises, nimmt man z vertical abwärts und also x horizontal; bezeichnet man mit v_0 die Geschwindigkeit, welche der Körper in dem tiefsten

Punkte des Kreises hat, so ist die Geschwindigkeit v in irgend einer Tiefe z gegeben durch

$$v^2 = v_0^{\,2} - 2g(l - z).$$

Setzt man $v_0^{\,2} = 2gh$,

so wird diess $v^2 = 2g(h + z - l)$. (a)

Man sieht, dass $v = 0$

wird, wenn $h + z = l$

wird, oder für $z = l - h$.

Ist $h < l$, so liegen die beiden entsprechenden Punkte in der untern Kreishälfte und der Körper wird dann jedesmal von diesen Punkten wieder zurückfallen.

Ist dagegen $h > l$, so wird der Körper die obere Kreishälfte erreichen, und so lange in dem Kreise fortgehen, als ihn die Centrifugalkraft noch darin festhält, wenn nicht die Kreisbahn selbst von der Art ist, dass der Körper nicht aus ihr herausfallen kann.

Der Druck auf den Kreis nach aussen ist gegeben durch

$$-N\cos(N, \varrho) = -mg\cos(z, \varrho) + m\frac{v^2}{z}.$$

Da N hier in der Richtung von ϱ selbst liegen muss, so ist $N, \varrho = 180^0$ und daher obiger Ausdruck der Werth von N selbst. Es ist

$$\cos(z, \varrho) = -\frac{z}{l}$$

und setzt man für v^2 den obigen Werth, so erhält man

$$N = mg\frac{3z + 2h - 2l}{l}. \qquad \text{(b)}$$

Dieser Druck wird Null für

$$z = -\tfrac{2}{3}(h - l) = \tfrac{2}{3}(l - h).$$

Da z analytisch $> l - h$ sein muss, weil für $z = l - h$ die Geschwindigkeit Null wird, so kann, so lange $l - h$ positiv ist, N nicht Null werden, was auch die unmittelbare Anschauung gibt. Ist dagegen

$$h > l,$$

so wird die Bewegung bis in die obere Hälfte des Kreises fortgehen, und dort ehe $v = 0$ wird

$$z = -\tfrac{2}{3}(h - l),$$

damit also der Druck auf die Bahn Null werden, und nun der Körper, wenn diess die Bahn zulässt, diese nach innen verlassen. Diess wird aber nur dann eintreten, wenn nicht hierzu z kleiner als $-l$ werden müsste.

Für $$z = -l = -\tfrac{2}{3}(h - l) \text{ oder}$$
$$5l = 2h$$

und für jedes grössere h wird dagegen der Körper den ganzen Kreis durchlaufen, und der Druck N immer nach aussen gerichtet sein. Dazu ist also nothwendig, dass die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte grösser oder gleich

$$\sqrt{5lg}$$

ist. Im tiefsten Punkte ist der Druck auf die Bahn am grössten gleich

$$N = mg\left(1 + \frac{2h}{l}\right)$$

und also für den Fall, dass die Geschwindigkeit gerade noch gross genug ist, damit der ganze Kreis durchlaufen wird

$$N = 6mg,$$

sechsmal so gross als das Gewicht des Körpers.

Aus der Gleichung (a) findet man

$$v = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(h + z - l)}$$

oder

$$dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{2g(h + z - l)}},$$

wobei das obere Zeichen der Bewegung in der Richtung s angehört, das untere der entgegengesetzten.

Setzt man nun unter der Voraussetzung, dass $l - h > -l$

$$z = l\cos\varphi;\; l - h = l\cos\alpha \text{ und } ds = l\,d\varphi,$$

so wird

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\alpha}}.$$

Es ist
$$2\cos\varphi = 2 - 4\sin\frac{\varphi}{2}^2,$$
womit
$$dt = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}^2 - \sin\frac{\varphi}{2}^2}}.$$

Setzt man hier noch
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin u,$$
was möglich ist, da φ immer kleiner als α oder gleich α sein muss, und wobei sin u alle Werthe von -1 bis $+1$ durchlauft, so wird
$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{1 - \sin\frac{\alpha}{2}^2\sin u^2}}.$$

Damit erhält man die Zeit, welche die Masse braucht um vom tiefsten Punkte des Kreises bis zum Winkel φ aufzusteigen gleich
$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2\sin u^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot F_{\sin\frac{1}{2}\alpha,\, u} \tag{c}$$
wo F das erste elliptische Integral ist. Die Dauer der halben Schwingung, an deren Ende der Ausschlag α erreicht wird, ist
$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot F_{\sin\frac{1}{2}\alpha,\, \frac{\pi}{2}}$$
und dieselbe Zeit ist erforderlich zum Rückgange. Daraus ergibt sich die Dauer einer einfachen Schwingung
$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot F_{\sin\frac{1}{2}\alpha,\, \frac{\pi}{2}}. \tag{d}$$

Will man die Rechnung für wenig weite Schwingungen, also für kleine Werthe von α ausführen, so kann man in (c) vor der Integration die Wurzel in eine Reihe entwickeln und dann integriren; man erhält so
$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin u^2 + \frac{1.3}{2.4}\sin\frac{\alpha}{2}^4\sin u^4 + \ldots\right]du.$$

Durch theilweise Integration hat man aber

$$\int \sin u^{2a}\, du = -\frac{1}{2a}\cos u \sin u^{2a-1} + \frac{2a-1}{2a}\int \sin u^{2a-2}\, du.$$

Integrirt man von 0 bis u, so wird

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,[u + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\cos u \sin u) + \ldots]. \qquad (e)$$

Daraus findet man für $u = \frac{\pi}{2}$ die halbe Schwingungsdauer, und damit die Dauer einer einfachen Schwingung

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^4 + \ldots\right]. \qquad (f)$$

97. Die Bewegung eines schweren Körpers in einem verticalen Kreise, welche in der letzten Aufgabe untersucht worden ist, die Bewegung des einfachen Pendels, das man aus einer schweren, in einem Punkte vereinigten Masse, welche mittelst eines masselosen und unausdehnsamen Fadens an einem Fixpunkte aufgehängt ist, bestehend denkt. Die Dauer der unendlich kleinen Schwingungen, d. h. solcher, bei denen die Weite der Schwingung unendlich klein ist, ist

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wo l die Länge des Pendels, d. h. die Entfernung der schweren Masse von dem Aufhängepunkt ist. Man sieht die Schwingungsdauer ist proportional mit der Quadratwurzel aus der Länge des Pendels und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung der Schwere.

Man gibt bei dem Pendel gewöhnlich die Dauer einer einfachen und unendlich kleinen Schwingung an, welche man aus der beobachteten Schwingungsdauer τ, mit Hilfe der Formel am Ende der letzten Nummer berechnet. Gewöhnlich sind die beobachteten Schwingungen so klein, d. h. $\frac{h}{2l}$ der letzten Nummer ist so klein, dass man nur noch das Glied

$$\frac{1}{2^2}\cdot\frac{h}{2l}$$

zu beachten hat.

Für sehr kleine Schwingungen hat, wie man sieht, die Weite der Schwingungen nur einen sehr wenig merklichen Einfluss.

Da diese Schwingungen sehr oft vorkommen, so wollen wir die Bewegungsgleichung noch in einer andern Form betrachten.

Bildet zur Zeit t der Faden den Winkel φ mit den Verticalen, so ist die Geschwindigkeit der Masse $l\frac{d\varphi}{dt}$ und daher die Beschleunigung nach der Bahn

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

während die Componente der bewegenden Kraft in dieser Richtung

$$-mg\sin\varphi$$

ist. Der Widerstand der Bahn ist hier rechtwinklich auf der Bahn, es ist daher (erste Gleichung 18 Nro. 89)

$$-mg\sin\varphi = ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad \text{(a)}$$

Für unendlich kleine Schwingungen hat man hieraus

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

mit dem allgemeinen Integral

$$\varphi = A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + B\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

woraus die Dauer einer Oscillation

$$2\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

übereinstimmend mit dem obigen.

Eine dritte Behandlungweise der vorliegenden Aufgabe ist folgende. Die dritte der Gleichungen (17, Nro. 88) gibt

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg + N\cos(N,z)$$

$$= mg - N\frac{z}{l}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck den früher gefundenen Werth von N, so erhält man

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g \left[1 - \frac{3z + 2h - 2l}{l} \cdot \frac{z}{l} \right].$$

Setzt man hier

$$z = l - z'$$

und vernachlässigt dann die Producte hz' und z'^2 gegen lz', was für sehr kleine Schwingungen als Annäherung erlaubt ist, so wird

$$-\frac{d^2 z'}{d t^2} = \frac{g}{l}(4z' - 2h).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung findet sich

$$z' = A \cos t \sqrt{\frac{4g}{l}} + B \sin t \sqrt{\frac{4g}{l}} + \frac{h}{2},$$

wo A und B die Integrationsconstanten sind. Zur Bestimmung dieser Constanten dient

$$z' = 0 \text{ für } t = 0$$

und aus der Gleichung für v^2

$$\frac{dz'}{dt} = 0 \text{ für } z' = h;$$

womit man findet

$$z' = \frac{h}{2}\left(1 - \cos t \sqrt{\frac{4g}{l}}\right) = h\left(\sin t \sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2.$$

Man sieht, dass z' seinen grössten Werth erhält für

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{4g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\tau}{2};$$

es wird wieder gleich Null für

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{4g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \tau,$$

welches wie früher die Dauer einer einfachen Schwingung ist.

c. Der schwere Körper in der Cycloide. Tautochrone.

98. Auf die Gleichungen, welche am Ende der vorhergehenden Nummer als Annäherungsformeln für sehr kleine Schwingungen erhalten wurden, kommt man strenge bei der Betrachtung der Bewegung in einer verticalen Cycloide mit verticaler Axe.

Man hat für diese mit den Bezeichnungen der vorhergehenden Nummer, wenn a der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist,

$$\left(\frac{ds}{dz'}\right)^2 = \frac{2a}{z'};$$

woraus

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 \cdot \frac{2a}{z'}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = \frac{z'}{2a} \cdot 2g(h - z').$$

Daraus

$$2\frac{dz'}{dt}\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{g}{a}(h - 2z')\frac{dz'}{dt},$$

woraus

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{g}{a}z' + \frac{gh}{2a}.$$

Diess ist dieselbe Gleichung, welche oben integrirt wurde, wenn man $a = \frac{l}{4}$ setzt. Bei der Cycloide ist also die Schwingungsdauer in der That von der Schwingungsweite unabhängig,

$$z' = \frac{h}{2}\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$

die genaue Gleichung der Bewegung.

Weil in der Cycloide die verschiedenen Schwingungsbögen vom Scheitel weg in derselben Zeit durchlaufen werden, nennt man die Cycloide auch die **Tautochrone**.

d. Das conische Pendel.

99. Ein schwerer Körper ist gezwungen, sich in einer Kugelschale vom Halbmesser l zu bewegen.

Den Anfangspunkt des Coordinaten nehmen wir im Mittelpunkte der Kugel, x und y horizontal, z vertical abwärts.

Die Geschwindigkeit ergibt der Satz von der Arbeit

$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(z - z_0) = 2g(h + z - z_0). \quad \text{(a)}$$

Die Effectivkräfte nach den drei Coordinatenaxen geben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l}, \quad \text{(b)}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} + mg.$$

Um aus diesen Gleichungen den Widerstand der Bahn, die Spannung des Fadens, zu bestimmen, multiplicire man sie der Reihe nach mit x, y, z, und addire. Diess gibt

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)=-Nl+mgz.$$

Die Gleichung der Kugeloberfläche ist

$$x^2+y^2+z^2=l^2, \tag{c}$$

woraus man durch zweimalige Ableitung erhält

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0,$$

woraus mit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2$$

die obige Gleichung zur Bestimmung von N in

$$-mv^2=-Nl+mgz, \text{ oder}$$

$$N=m\frac{v^2}{l}+mg\frac{z}{l} \text{ übergeht.} \tag{d}$$

Diese Gleichung hätte man auch unmittelbar hinschreiben können. Es muss

$$mg\frac{z}{l}-N$$

gleich der Effectivkraft in der Richtung von l sein. Diese ist aber gleich der Masse multiplicirt mit der Beschleunigung in dieser Richtung. Nun hat die Beschleunigung eine Componente nach v, welche rechtwinklich auf l steht, und eine in der Richtung des Krümmungshalbmessers der Bahn. Die erste gibt keine Componente nach l, die zweite dagegen die Componente

$$\frac{mv^2}{\varrho}\cos(\varrho, l)=-\frac{mv^2}{l}.$$

womit man obige Gleichung erhält.

Substituirt man in die Gleichung (d) den Werth von v^2 aus (a), so erhält man

$$N=m.\frac{g}{l}.(2h+3z-2z_0). \tag{e}$$

Setzt man diesen Werth in die dritte der Gleichungen (b), so wird diese

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{g}{l^2}(2h + 3z - 2z_0)z + g. \tag{f}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\frac{dz}{dt}$, so lässt sie sich integriren, und man erhält, wenn man voraussetzt, es sei für $z = z_0$ die verticale Componente der Geschwindigkeit gleich Null, nach einiger Reduction

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l^2}(z - z_0)(l^2 - hz_0 - hz - z^2).$$

Setzt man
$$l^2 - z_1{}^2 = h(z_0 + z_1), \tag{g}$$
so wird diese Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l^2(z_0 + z_1)}(z_1 - z_0)(z_1 - z)\,[l^2 + z_1 z_0 + z(z_1 + z_0)].$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Pendel immer bis zu derselben Höhe aufsteigt und zu derselben Tiefe abwärts sinkt; die Wendepunkte findet man für $\frac{dz}{dt} = 0$; sie sind, wenn h nicht sehr gross ist, bei z_0 und z_1.

Führt man nun

$z = l - \zeta$; $z_0 = l - \zeta_0$; $z_1 = l - \zeta_1$ ein, das heisst,

verlegt man den Ursprung der Coordinaten in den tiefsten Punkt der Kugelfläche, so wird obige Gleichung

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = 2g\frac{2l + \frac{\zeta_0 \zeta_1}{2l - \zeta_0 - \zeta_1}}{l^2}(\zeta_0 - \zeta)(\zeta - \zeta_1)\left(1 - \frac{\zeta}{2l + \frac{\zeta_0 \zeta_1}{2l - \zeta_0 - \zeta_1}}\right)$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$2l + \frac{\zeta_0 \zeta_1}{2l - \zeta_0 - \zeta_1} = 2lk \tag{h}$$

setzt, wo also k ein Coefficient ist, welcher grösser als 1 ist,

$$2\sqrt{\frac{gk}{l}}\,dt = \pm\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_0 - \zeta)(\zeta - \zeta_0\left(1 - \frac{\zeta}{2lk}\right)}},$$

worin das obere Zeichen dem Aufsteigen, das untere dem Abwärtssinken des Pendels angehört. Man sieht hieraus ohne Weiteres,

dass der aufsteigende Bogen in derselben Zeit durchlaufen wird, wie der abwärtsgehende, und dass die Verticalprojection nach dem doppelten dieser Zeit τ' dieselbe Bewegung wiederholt. Um hiermit t, das man durch elliptische Integrale ausdrücken könnte, durch eine Reihe auszudrücken, hat man

$$2\sqrt{\frac{gk}{l}}dt = \pm\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_0-\zeta)(\zeta-\zeta_0)}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\zeta}{2lk}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\zeta}{2lk}\right)^2+..\right)$$

zu integriren. Man findet für die ersen Glieder, wenn man von $\zeta = \zeta_1$ bis ζ_0 integrirt und $\zeta_0 > \zeta_1$ voraussetzt

$$2\sqrt{\frac{gk}{l}}\tau' = \left(-\arcsin\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_0-\zeta_1}+\arcsin\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\zeta_0-\zeta_0}\right)$$

$$\left[1+\frac{\zeta_0+\zeta_1}{2}\cdot\frac{1}{2lk}+\left(\frac{3}{8}(\zeta_0+\zeta_1)^2+\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\right)\frac{1}{4l^2k^2}+\ldots\right]$$

$$=\pi\left[1+\frac{\zeta_0+\zeta_1}{2}\cdot\frac{1}{2lk}+\left(\frac{3}{8}(\zeta_0+\zeta_1)^2+\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_1\right)\frac{1}{4l^2k^2}+..\right] \quad (k)$$

was für unendlich kleine Schwingungen, bei welchen ζ_0 und ζ_1 gegen l verschwinden in

$$\tau' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wie beim einfachen Pendel übergeht. Man erhält die Bewegung des einfachen Pendels aus obiger Gleichung für $\zeta_1 = 0$ oder $z_1 = l$.

Die Bewegung der Horizontalprojection ist eine Centralbewegung, da die horizontale Componente von N, der einzigen Kraft, welche hier in Betracht kommt, immer durch die Axe der z geht. Das Quadrat der Entfernung der Masse m von der Axe der z zur Zeit t ist

$$l^2 - z^2 = 2l\zeta - \zeta^2,$$

wesshalb die horizontale Bewegung durch

$$(2l\zeta - \zeta^2)\frac{d\varphi}{dt} = c^2$$

gegeben ist (Nro. 74), worin φ der Winkel der Verticalebene durch das Pendel mit der x, z Ebene ist. Die Flächengeschwindigkeit c^2 ergibt sich

$$c^2 = v_0\sqrt{2l\zeta_0 - \zeta_0{}^2} = \sqrt{2gh(2l\zeta_0 - \zeta_0{}^2)},$$

oder mit dem Werthe von h aus (g)

$$c^2 = \sqrt{\frac{2g(2l\zeta_1 - \zeta_1^2)(2l\zeta_0 - \zeta_0^2)}{2l - \zeta_0 - \zeta_1}} = 2\sqrt{glk\zeta_0\zeta_1}.$$

Die Gleichung der horizontalen Bewegung wird damit

$$d\varphi = 2\sqrt{glk\zeta_0\zeta_1}\frac{dt}{2l\zeta - \zeta^2}. \qquad (l)$$

Setzt man in diese Gleichung den oben entwickelten Werth von dt, so wird sie

$$d\varphi = \pm l\sqrt{\zeta_0\zeta_1}\cdot\frac{1}{2l\zeta - \zeta^2}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_0 - \zeta)(\zeta - \zeta_0)}}\left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{\zeta}{2lk} + \dots\right]$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta_0\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_0 - \zeta)(\zeta - \zeta_0)}}\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2l}\left(1 + \frac{1}{2k}\right) + \dots\right],$$

und durch Integration von $\zeta = \zeta_1$ bis $\zeta = \zeta_0$ findet man

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta_0\zeta_1}\left[\frac{1}{\sqrt{\zeta_0\zeta_1}}(\operatorname{arc\,tan}(+\infty) - \operatorname{arc\,tan}(-\infty)) + \right.$$

$$\left. + \pi\frac{1}{2l}\left(1 + \frac{1}{2k}\right) + \dots\right],$$

was

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 + \frac{1 + \frac{1}{2k}}{2l}\sqrt{\zeta_0\zeta_1} + \dots\right] \qquad (m)$$

ist. Denselben Bogen findet man für das Abwärtssteigen von ζ_0 bis ζ_1.

Sind die Schwingungen unendlich klein, so wird

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

die höchsten und tiefsten Stellen der Bahn liegen in rechtwinklich gegen einander gestellten Verticalebenen und kommen immer wieder an dieselben Stellen. Die Horizontalprojection der Bahn ist dann eine Ellipse, wie man am einfachsten aus den beiden ersten Gleichungen (b) sieht, in welchen hier $N = mg$, constant wird.

Beachtet man aber ζ_0 und ζ_1 gegen l, so zeigt die vorstehende Formel, dass die höchsten und tiefsten Punkte der Bahn in Verticalebenen liegen, welche um mehr als rechte Winkel aus einander liegen, und zwar um so mehr, je grösser $\sqrt{\zeta_0\zeta_1}$ ist Die

horizontale Projection der Bahn erscheint dann, als bewege sich die Masse m in einer Ellipse, deren Axen immer dieselbe Grössen haben, sich aber in der Richtung drehen, in welcher die Masse m umlauft. Für eine ganze Oscillation in der verticalen Projection, d. h. bis der höchste Punkt das zweite Mal erreicht wird, beschreibt die grosse Axe dieser Ellipse einen Bogen von

$$\pi \frac{1 + \frac{1}{2k}}{l} \sqrt{\zeta_0 \zeta_1} \tag{n}$$

in der obigen genäherten Rechnung.

Wird $z_1 = z_0$, so müssen alle Punkte der Bahn in einer Tiefe liegen, und das Pendel einen geraden Kegel oder die Masse m einen horizontalen Kreis durchlaufen. Hierzu gibt (g) die Bedingung

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{l^2 - z_0^2}{2 z_0}.$$

Die Bewegung muss eine gleichförmige sein, wie diess auch (l) für ζ constant gibt. Die Dauer eines ganzen Umlaufes findet sich

$$\tau_1 = \frac{2\pi \sqrt{l^2 - z_0^2}}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}. \tag{o}$$

Der ganze Umlauf erfolgt also in derselben Zeit, in welcher ein in der Verticalebene schwingendes einfaches Pendel von der Länge z_0 zwei einfache Schwingungen von unendlich kleiner Weite macht.

e. Bewegung des Pendels in einem widerstehenden Mittel.

100. α. Für sehr kleine Schwingungen in der Luft beobachtet man, dass die Schwingungsweiten nahe in einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn die Zahl der Schwingungen in einer arithmetischen Reihe wächst, während die Schwingungsdauer messbar dieselbe bleibt. Welches ist die Kraft, welche neben der Schwerkraft wirkend diese Abnahme bewirkt?

Ist φ der Winkel, welchen das Pendel zur Zeit t mit der Verticalen bildet, so findet die oben bezeichnete Erscheinung statt, wenn

$$\varphi = A e^{-bt} \sin a t$$

ist, wo A, b und a constant sind. Es wird φ gleich Null, so oft

a t einer ganzen Zahl π gleich wird, und die Dauer einer einfachen Schwingung ist daher

$$\tau = \frac{\pi}{a}.$$

Die grösste Ausweichung nach der Seite der positiven oder der negativen φ ist erreicht, wenn

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

wird, oder wenn

$$0 = -b \sin a t + a \cos a t,$$

also

$$\tan a t = \frac{b}{a}$$

wird. Bezeichnet man den kleinsten positiven Bogen, für welches das der Fall ist, mit γ, so treten diese grössten Ausweichungen zu den Zeiten

$$a t = \gamma; \ = \gamma + \pi; \ \gamma + 2\pi$$

ein, und der Uebergang von einer zur nächsten findet also in Zeitintervallen statt, welche wieder

$$\frac{\pi}{a} = \tau$$

sind. Die Elongationen selbst findet man der Reihe nach

$$\varphi = A e^{-\frac{b\gamma}{a}} \sin \gamma; \ - A e^{-\frac{b\gamma}{a} - \frac{b\pi}{a}} . \sin \gamma; \ldots .$$

so dass also der Exponent der geometrischen Reihe dieser absolut genommenen Elongationen

$$e^{-\frac{b\pi}{a}} = \frac{1}{c}$$

ist, welcher durch die Beobachtungen bestimmt wird. Nun hat man die Componente der bewegenden Kraft in der Richtung der Bahn, wenn l die Länge des Pendels und die Masse gleich m ist

$$m l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = m l \left[A b^2 e^{-bt} \sin a t - 2 A b a e^{-bt} \cos a t - A a^2 e^{-bt} \sin a t \right]$$

was sich auch

$$m l \left[-2b \frac{d\varphi}{dt} - (a^2 + b^2)\varphi \right]$$

schreiben lässt.

Diese Componente der Kraft besteht also erstlich aus einem Theile

$$-m.2bl\frac{d\varphi}{dt},$$

welcher der Bewegung direct entgegen und der Geschwindigkeit proportional ist, einem Widerstande des Mittels; dann aus einem Theile, welcher, wenn man $\sin\varphi$ für den als sehr klein vorausgesetzten Bogen φ setzt, gleich

$$-m(a^2+b^2)l\sin\varphi$$

ist, und welcher die Componente von der verticalen Kraft

$$m(a^2+b^2)l$$

ist, d. h. die Componente des Gewichtes mg.

Die Schwingungsdauer in der Luft ist

$$\tau=\frac{\pi}{a},$$

im leeren Raume wäre sie

$$\tau_1=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Mit

$$(a^2+b^2)l=g$$

findet man

$$\tau_1=\pi\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}=\frac{\pi}{a}.\sqrt{\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}},$$

wofür man bei der Kleinheit von $\frac{b}{a}$ setzen kann

$$\tau_1=\tau\left(1-\frac{b^2}{2a^2}\right)=\tau\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\ln c}{\pi}\right)^2\right).$$

Diese Correction ist bei der Bewegung des Pendels in der Luft ganz unbedeutend, wenn die Schwingungen so klein sind, dass man das oben angenommene Gesetz annehmen kann; dagegen finden die hier entwickelten Formeln Anwendung bei den Schwingungen der Magnete in der Nähe von metallischen Massen.

β. Der Widerstand des Mittels sei mw, wo w wie in Nr. 58 eine Function der Geschwindigkeit ist, welche mit der Geschwindigkeit v zugleich Null wird, und mit v wächst.

Für sehr kleine Schwingungen kann man hier die Untersuchung in folgender, von Cauchy herrührender Weise annähernd behandeln.

Geht das Pendel von der Ruhe und dem Ausschlagwinkel α aus, ist zur Zeit t der Winkel, welchen das Pendel mit der Verticalen bildet, gleich φ, so hat man die Beschleunigung nach der Bahn

$$\frac{dv}{dt} = g\varphi - w,$$

wo wegen der Kleinheit des Winkels erlaubt war φ für $\sin\varphi$ zu setzen. Ist l die Länge des Pendels, so ist noch

$$-l\frac{d\varphi}{dt} = v.$$

Beide Gleichungen gelten für die ganze einfache Schwingung.

Multiplicirt man nun die zweite Gleichung mit dem noch unbesimmten Coefficienten λ und zieht sie, nachdem mit l dividirt ist, von der ersten ab, so erhält man

$$\frac{d(v+\lambda\varphi)}{dt} = -\frac{\lambda}{l}\left(v - \frac{gl}{\lambda}\varphi\right) - w \text{ oder}$$

wenn man nun $\lambda^2 = -gl$ (a)

setzt $\frac{d(v+\lambda\varphi)}{dt} = -\frac{\lambda}{l}(v+\lambda\varphi) - w.$ (b)

Setzt man hier vorerst $w = 0$, so hat man das Integral dieser Gleichung

$$\ln(v+\lambda\varphi) - \ln\lambda\alpha = -\frac{\lambda}{l}t \quad \text{oder}$$

$$v + \lambda\varphi = \lambda\alpha e^{-\frac{\lambda}{l}t}.$$

Setzt man hier für λ seinen Werth aus (a), so erhält man, weil die reellen und die imaginären Theile dieser Gleichung einzeln einander gleich sein müssen

$$v = \alpha\sqrt{gl}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} \text{ und}$$

$$\varphi = \alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

wie diess früher (Nro. 97) gefunden wurde.

Kehren wir zur Gleichung (b) zurück. Multiplicirt man sie mit

$$e^{\frac{\lambda t}{l}},$$

so wird ihr Integral

$$(v + \lambda \varphi) e^{\frac{\lambda t}{l}} - \lambda \alpha = - \int_0^t e^{\frac{\lambda t}{l}} w \, dt$$

oder

$$v + \lambda \varphi = \lambda \alpha e^{-\frac{\lambda t}{l}} - e^{-\frac{\lambda t}{l}} \int_0^t e^{\frac{\lambda t}{l}} w \, dt .$$

Setzt man hier für λ seinen Werth und trennt wie oben die reellen und die imaginären Werthe, so erhält man die beiden Gleichungen, in welchen wie früher

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = a$$

gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha a l \sin a t - \cos a t \int_0^t w \cos a t \, dt - \sin a t \int_0^t w \sin a t \, dt, \\ \varphi &= \alpha \cos a t - \frac{1}{a l} \cos a t \int_0^t w \sin a t \, dt + \frac{1}{a l} \sin a t \int_0^t w \cos a t \, dt. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Für den leeren Raum ist die Dauer einer einfachen Schwingung

$$\tau = \frac{\pi}{a},$$

zu Anfang und Ende dieser Zeit wird die Geschwindigkeit Null. Setzt man in dem eben gefundenen Werth der Geschwindigkeit $t = \tau$, so reducirt sich dieser auf

$$v = \int_0^\tau w \cos a t \, dt.$$

Setzt man hier $w = f(k \sin a t)$,

wo in dem für diese Schwingungen immer nur sehr kleinen w für die Geschwindigkeit v der für den leeren Raum geltende Werth $v = k \sin a t$ genommen ist, setzt man noch

$$a t = \beta,$$

so wird die Geschwindigkeit für $t = \tau$

$$a v = \int_0^{\pi} f(k \sin \beta)\, d(\sin \beta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k \sin \beta)\, d(\sin \beta) - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(k \sin \beta)\, d(\sin \beta).$$

Die Sinus sind gleich und vom gleichen Zeichen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von π bis $\frac{\pi}{2}$, die beiden Glieder rechts heben sich daher auf, so weit k in beiden als gleich geachtet werden kann, k aber ist nahe $= \alpha \sqrt{g l}$ und ändert sich also nur mit der Schwingungsweite. Die Schwingungsdauer ist also so weit von dem Luftwiderstaude unabhängig, als die Schwingungsweite dieselbe bleibt. Da aber das letzte nicht genau der Fall ist, sondern die Schwingungsweite kleiner wird, so wird durch den Luftwiderstand die Schwingungsdauer etwas geändert und zwar, da für $t = \tau$ die Geschwindigkeit noch positiv ist, etwas vergrössert, wie sich diess auch bei dem besondern Gesetze des Widerstandes, welches in (α) betrachtet wurde, sich ergab.

Für $t = \tau = \frac{\pi}{a}$ wird φ gleich

$$\alpha_1 = -\alpha + \frac{1}{a l} \int_0^{\tau} w \sin a t\, d t.$$

Da in der Zeit 0 bis τ, $\sin a t$ immer positiv ist, und w ebenso sein Zeichen innerhalb der ersten Schwingung nicht ändert und positiv ist, so ist das zweite Glied rechts positiv, und der Winkel α_1, bei welchem das Pendel zur Ruhe kommt, absolut genommen, kleiner als der Winkel α; die Schwingungsweite nimmt daher ab durch den Luftwiderstand.

Nimmt man den Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, gleich

$$\frac{v^2}{b^2} g,$$

wo b eine Constante ist, die sehr gross ist, setzt man in diesem Widerstande für v^2 den genäherten Werth

$$\alpha^2 a^2 l^2 \sin a t^2$$

so wird

$$\alpha_1 = -\alpha + \frac{\alpha^2 g a l}{b^2} \int_0^\tau \sin a t^3 dt$$

$$= -\alpha + \frac{\alpha^2 g l}{b^2}\left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{4}\right) = -\alpha + \frac{2}{3}\frac{\alpha^2 g l}{b^2}$$

die Weite des zweiten halben Schwingungsbogens. Man findet diesen aus α durch Multiplication mit

$$\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha g l}{b^2}\right),$$

und ebenso dann den nächsten Schwingungsbogen gleich

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha_1 g l}{b^2}\right)$$

und so weiter. Die Schwingungsweiten bilden also bei einem Widerstande, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, eine Reihe, deren Glieder in geringerem Maasse als die einer geometrischen abnehmen.

Zweites Buch.

Kräfte an einem starren Körper.

---

101. Sind die Massen m, m_1, m_2... in den Punkten A, B, C,... vorhanden und sind diese Massen so verbunden, dass die Punkte A, B, C... ihre gegenseitigen Lagen nicht ändern können, so nennt man diese Verbindung ein starres Massensystem. Erfüllen dabei die Massen stetig neben einander liegend einen Raum, so heisst die Verbindung ein starrer Körper.

102. Dieser heisst gleichförmig dicht, wenn in gleichen Volumtheilen gleiche Massen enthalten sind, andernfalls heisst er ungleichförmig dicht.

In einem gleichförmig dichten Körper nennt man Dichte die Menge Masse, welche die Volumeinheit des Körpers erfüllt. Bei einem ungleichförmig dichten Körper ist die Dichte im Allgemeinen von einem Punkte zum andern verschieden. Man gibt die Dichte an einem Punkte durch die Masse an, welche die Volumeinheit enthielte, wenn diese Volumeinheit überall so mit Masse erfüllt wäre, wie an der betrachteten Stelle.

Massenmittelpunkt, Schwerpunkt.

103. Hat man für eine Reihe von Massen m, m′, m″... welche in den Punkten x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″... sich befinden, einen Punkt, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 seien, bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_0 \Sigma m &= \Sigma m x, \\ y_0 \Sigma m &= \Sigma m y, \\ z_0 \Sigma m &= \Sigma m z, \end{aligned} \tag{21}$$

so hat dieser Punkt die Eigenschaft, dass die Summe der Produkte aller Massen in ihre Entfernungen von einer beliebigen Ebene gleich ist dem Producte aus der Summe aller Massen in seine Entfernung von jener Ebene. Man nennt diesen Punkt den **Mittelpunkt** der betrachteten Massen, oder wenn diese einen geschlossenen Körper bilden, den **Massenmittelpunkt dieses Körpers**, oder auch den **Schwerpunkt** desselben, wegen einer später zu erweisenden Eigenschaft.

Beweis dieses Satzes. Ist n die Normale zu der gegebenen Ebene, ∂ der Abstand dieser Ebene von dem Anfangspunkte der Coordinaten x, y, z, bezeichnet man mit

$$n_0\,,\ n\,,\ n'\,,\ n''\ \ldots .$$

die Entfernungen des Massenmittelpunktes und der Massen m, m′, m″ ... von dieser Ebene, so hat man

$$n_0 + \partial = x_0 \cos(n, x) + y_0 \cos(n, y) + z_0 \cos(n, z)$$

und ebenso z. B.

$$n' + \partial = x' \cos(n, x) + y' \cos(n, y) + z' \cos(n, z)\,.$$

Multiplicirt man daher die obigen Gleichungen (a) der Reihe nach mit cos (n, x), cos (n, y), cos (n, z) und addirt sie, so erhält man

$$(n_0 + \partial)\Sigma m = \Sigma m(n + \partial) \quad \text{oder weil}$$

$$\partial \Sigma m = \Sigma m \partial \quad \text{ist}$$

$$n_0 \Sigma m = \Sigma m n\,,$$

welches der oben ausgesprochene Satz ist.

104. Die Bestimmung des Massenmittelpunktes geschieht mit Hülfe der Gleichungen (a), wo nicht etwa geometrische Betrachtungen kürzer zum Ziele führen. Geht die Ebene der y, z durch den Massenmittelpunkt, so ist x_0 gleich Null, und daher

$$0 = \Sigma m x\,.$$

Ist der Anfangspunkt der Coordinaten der Massenmittelpunkt, so hat man

$$0 = \Sigma m x; \quad 0 = \Sigma m y; \quad 0 = \Sigma m z\,.$$

105. Für gleichförmig dichte Linien, Flächen und Körper findet man folgende Lage des Massenmittelpunktes:

für eine gerade Linie, ihre Mitte.

Bei einer Kreislinie, deren Halbmesser r und deren Länge $2r\alpha$ ist, liegt der Massenmittelpunkt in der Halbirungslinie um

$$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

vom Kreismittelpunkt entfernt.

Bei einem Dreiecke liegt der Schwerpunkt der Fläche um den dritten Theil der Höhe von der Grundlinie entfernt,

bei einem Parallelogramme in dem Durchschnitte beider Diagonalen,

bei einem Kreisausschnitt vom Halbmesser r und der Bogenlänge $2r\alpha$ in der Mittellinie vom Kreismittelpunkt um

$$\tfrac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

entfernt;

bei einem Ringstücke mit den Halbmessern r und r_1 über denselben Centriwinkel, vom Mittelpunkte der Kugel um

$$\tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^2 + r r_1 + r_1^2}{r + r_1} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha};$$

bei einem Kreisabschnitte um

$$\tfrac{2}{3} r \frac{\sin \alpha^3}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

und für den Halbkreis

$$\frac{4r}{3\pi}.$$

Der Massenmittelpunkt einer Kugelhaube liegt in der Mitte der Höhe der Kugelhaube.

Der Massenmittelpunkt einer Pyramide liegt um den vierten Theil der Höhe von der Grundfläche weg;

bei einem Parallelepiped in dem Durchschnitte der Diagonalen;

bei einem Kugelausschnitt vom Halbmesser r und der Oeffnung 2α um

$$\tfrac{3}{4} r \cos \frac{\alpha}{2}^2,$$

bei der Halbkugel um

$$\tfrac{3}{8} r.$$

Geometrisches über die Bewegung eines Körpers.

106. Die Lage eines starren Körpers ist vollständig bekannt, wenn man die Lage dreier, fest mit ihm verbundener Punkte kennt, welche nicht in einer geraden Linie liegen.

107. Wird ein Körper so verschoben, dass die drei Linien, welche drei Punkte des Körpers verbinden, parallel zu ihren früheren Lagen bleiben, so bleibt auch jede mit dem Körper fest verbundene Linie parallel zu ihrer früheren Lage; eine solche Verschiebung nennt man eine Translation.

Bei einer Translation haben in einem Zeitpunkte alle Punkte des Körpers dieselbe Geschwindigkeit, und diese Geschwindigkeiten sind alle parallel.

Eine Translation ist vollständig bekannt, wenn die Bewegung eines Punktes des Körpers bekannt ist.

108. Bleiben zwei Punkte eines Körpers während seiner Bewegung unbeweglich, so sind auch alle Punkte in der geraden Verbindungslinie jener beiden unbewegt, und der Körper dreht sich, rotirt um eine Axe, welche die gerade Linie durch jene Fixpunkte ist. Diese Bewegung heisst eine Drehung oder eine Rotation um eine Axe.

109. Bei der Rotation um eine Axe beschreibt jeder Punkt des Körpers eine Kreislinie, welche rechtwinklich auf jener Axe steht. Verbindet man zwei Punkte des Körpers zu den Zeiten t und t_1 mit den Mittelpunkten der von ihnen beschriebenen Kreislinien, so sind die beiden so erhaltenen Winkel, wegen der Starrheit des Körpers gleich gross, oder alle Punkte des Körpers drehen sich in derselben Zeit um gleich grosse Winkel um die Axe. Die Grösse dieses Winkels heisst der Drehwinkel.

110. Eine Rotation um eine Axe heisst gleichförmig, wenn in gleichen Zeiten die Drehwinkel gleich gross sind. Man gibt die Geschwindigkeit der Drehung dadurch an, dass man den Winkel bezeichnet, durch welchen der Körper in der Zeiteinheit gedreht

wird. Diese angegebene Geschwindigkeit der Drehung nennt man die Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, und ist dabei der Winkel durch die Länge des Bogens vom Radius 1 gemessen, so ist ω zugleich die Geschwindigkeit, welche die Punkte haben, die in der Entfernung 1 von der Drehaxe liegen. Für Punkte in der Entfernung r von der Drehaxe ist die Geschwindigkeit

$$r\omega$$

und ihre Richtung rechtwinklich auf r.

111. Ist die Rotation nicht gleichförmig, so stellt man die Winkelgeschwindigkeit in folgender Weise fest.

Beschreibt ein Punkt in der Entfernung r von der Axe in der unendlich kleinen Zeit dt den unendlich kleinen Bogen

$$r\,d\vartheta,$$

so ist seine Geschwindigkeit nach der Tangente an diesen Bogen

$$r\frac{d\vartheta}{dt}$$

und für einen Punkt in der Entfernung 1 von der Axe

$$\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Diess ist die Länge des Bogens, welcher von einem Punkte in der Entfernung 1 von der Axe in der Zeiteinheit gleichförmig durchlaufen würde, wenn er sich in dieser Zeit mit der Geschwindigkeit bewegen würde, welche er in der unendlich kleinen Zeit dt hat, oder auch der Winkel, um welchen sich der Körper in der Zeiteinheit drehen würde, wenn er sich während dieser Zeit gleichförmig so drehen würde, wie er sich in der Zeit dt dreht. Man nennt diesen Bogen oder Winkel die Winkelgeschwindigkeit, welche der Körper in der Zeit t hatte. Bezeichnet man diese mit ω, so hat man

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

und die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r von der Axe zu gleicher Zeit

$$r\omega.$$

112. Die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung r von der Drehaxe ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t ist, in der Richtung der Bahn

$$\frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt},$$

und die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung 1 von der Drehaxe ist in der Bahn gemessen

$$\frac{d\omega}{dt}.$$

Diese Grösse nennt man hier die Winkelbeschleunigung.

113. Ist eine ebene Figur durch Drehung um eine auf ihr normale Axe aus einer Lage in eine zweite gekommen, so findet man die Lage dieser Axe, indem man den Mittelpunkt der Kreise sucht, welche durch je zwei Lagen derselben Punkte gehen.

Ist überhaupt eine ebene Figur in ihrer Ebene irgend wie verschoben, so kann man immer die Figur aus der ersten in die zweite Lage durch Drehung um eine zu der Ebene normale Axe bringen. Diese kann man in folgender Weise finden. Ist MN eine gerade Linie in der ersten Lage, welche in der zweiten Lage PQ ist; ist A der Durchschnittspunkt von MN und PQ und ist der Punkt A der Linie MN durch die Verschiebung nach B gekommen, wo B in PQ liegen muss. Trägt man nun die Länge AB von A aus auf MN auf nach AC; so muss C durch die Drehung nach A kommen. Der Mittelpunkt des Kreises durch C, A, B ist der Fusspunkt der Drehaxe.

Sind die Linien MN und PQ, welche die beiden Lagen derselben Linie der Figur sind, einander parallel, so ist die Verschiebung der Figur eine Translation; in diesem Falle kann man auch sagen, die Drehaxe liege in unendlicher Entfernung.

114. Dreht sich eine Figur beliebig in ihrer Ebene, so kann man für je zwei auf einander folgende Lagen derselben die Axe finden, um welche die Figur gedreht werden muss, um aus einer Lage in die unmittelbar darauf folgende zu kommen. Für je zwei aufeinander folgende Lagen wird man aber im Allgemeinen eine andere Drehaxe finden. Um jede dieser Axen wird sich im Allge-

meinen die Figur nur einen Augenblick drehen, um sich im folgenden um eine andere zu drehen. Geschieht zur Zeit t die Drehung um die Axe A, so heisst A die augenblickliche Drehaxe zur Zeit t.

Kennt man die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte der Figur zu derselben Zeit t, so werden die Normalen zu diesen Geschwindigkeiten sich in der augenblicklichen Drehaxe schneiden. Sind die beiden Normalen parallel, so findet in diesem Augenblicke Translation statt.

Man benützt das Vorstehende zur Construction von Normalen an Curven. Bewegt sich z. B. eine Curve rollend über eine andere Curve, so dreht sich die erste in jedem Augenblicke um den Berührungspunkt beider Curven; jeder Punkt der rollenden Curve beschreibt daher in diesem Momente ein Kreiselement, dessen Mittelpunkt der genannte Berührungspunkt ist. Der Radius von diesem Mittelpunkte an irgend einen Punkt der rollenden Curve gezogen, ist daher die Normale zu der Curve, welche dieser Punkt während des Rollens der Curve, der er angehört, beschreibt, welches also eine allgemeinere Epicycloide ist.

Bewegt sich die Linie AB auf den geraden CE und EF, die rechtwinklich unter sich sind, so dass die Endpunkte von AB immer in diesen Linien bleiben, so ist die Bewegung jedes dieser Punkte je nach CE und nach EF gerichtet; senkrechte zu CE und EF in A und in B errichtet durchschneiden sich in der augenblicklichen Drehaxe D. Hierbei beschreibt jeder Punkt G der Linie AB eine Ellipse, und DG ist die Richtung der Normalen dieser Ellipse.

Es sei ABD eine gerade Linie, die durch den unbeweglichen Punkt O geht, und von welcher der Punkt B immer in der geraden Linie MN bleibt; hierbei beschreibt ein Punkt D der Linie ABD eine Conchoide. Die Geschwindigkeit des Punktes B ist immer nach MN gerichtet, der Punkt, welcher eben jetzt in O ist, kann sich nur in der Richtung AB verschieben. Errichtet man daher in B eine Normale zu MN und in O eine zu AB, so ist der Durchschnittspunkt C beider die augenblickliche Drehaxe und CD die Normale der Conchoide.

115. Dreht sich eine ebene Figur zuerst um einen Punkt O um den Winkel α, dann um O' um den Winkel α', dann um O'' um

den Winkel α'' u. s. f., so kommt bei der ersten Drehung ein Punkt O_1' nach O', für welchen $O' O O_1' = \alpha$ und $O O_1' = O O'$ ist. Bei der zweiten Drehung kommt ein Punkt O_1'' nach O'', für welchen der Winkel $O_1'' O_1'$ mit der Verlängerung von $O O_1'$ gleich α' ist und $O_1' O_1'' = O_1' O_1''$ u. s. f.

Die Bewegung erfolgt also so, als ob die in der Figur feste Linie $O O_1' O_1'' O_1''' \ldots$ auf der unbeweglichen $O O' O'' O'''$ fortrolle. Für eine stetige Bewegung hat man daher den Ort der augenblicklichen Drehaxen zu bestimmen, dann den Ort der Punkte der Figur, welche nach und nach mit diesen Drehpunkten zusammenfallen; die Bewegung ist dann gegeben durch das Rollen des letzten Ortes auf dem ersten.

Bei dem Gleiten der geraden Linie AB auf den beiden Linien CE und EF (Nro. 114) ist der Ort der augenblicklichen Drehaxe ein Kreis vom Halbmesser AB mit dem Mittelpunkte E, dem Schnittpunkte der beiden Linien CE und EF. Andererseits ist, wenn wie oben D die augenblickliche Drehaxe ist, ABD immer ein rechtwinkliches Dreieck mit der Hypotenuse AB. Der Ort der Punkte der ebenen Figur, von welcher AB eine Linie ist, welche nach und nach mit den augenblicklichen Drehaxen zusammenfallen, ist daher ein Kreis über AB als Durchmesser. Die Bewegung der Linie AB kann dadurch hervorgebracht werden, dass man den Kreis vom Durchmesser AB in dem Kreise vom Halbmesser AB rollen lässt.

Für die Conchoide, das letzte Beispiel in Nro. 114, findet man für den Ort der augenblicklichen Drehpunkte eine Parabel, deren Axe normal zu MN ist mit dem Scheitel in O; die Gleichung der Curve der Punkte, welche mit den Drehpunkten nach und nach zusammenfallen, findet man

$$x^4 - c^2 x^2 = c^2 y^2,$$

wobei der Ursprung der Coordinaten x, y in B genommen ist, und x in der Richtung von BA liegt; c ist die Entfernung O von MN.

116. Betrachtet man die bisher bewegte ebene Figur als den Querschnitt eines Körpers normal zur Drehaxe, so wird alles bisher über die Bewegung der ebenen Figur gesagte sich unmittelbar auf diesen Körper übertragen lassen. Die betrachtete Bewegung

des Körpers lässt sich immer auf das Rollen einer mit dem Körper fest verbundenen cylindrischen Fläche über eine unbewegliche cylindrische Fläche zurückführen.

117. Die Betrachtung der Nro. 113 lässt sich unmittelbar auf die Verschiebung einer sphärischen Figur auf einer Kugeloberfläche übertragen, womit man den Satz erhält, dass die Verschiebung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugeloberfläche immer durch Drehung um einen Punkt der Kugeloberfläche, oder durch Drehung um einen Durchmesser der Kugel erhalten werden kann. Dieser Durchmesser ist die Drehaxe.

Betrachtet man die sphärische Figur als den Durchschnitt einer Kugel mit dem Mittelpunkte O mit einem Körper, so wird die oben betrachtete Verschiebung der sphärischen Figur von einer Drehung des Körpers um den Mittelpunkt der Kugel O begleitet sein; und man kann also den Körper aus einer Stellung in eine beliebige andere, bei welcher der Punkt O des Körpers unbeweglich bleibt, durch eine Drehung um eine durch O gehende Axe bringen.

118. Kommen die drei Punkte A, B, C eines Körpers an die Orte A′, B′, C′, so kann man den Körper zuerst parallel zu sich verschieben, dass A nach A′ kommt, und ihn dann so um eine durch A′ gehende Axe drehen, dass B und C nach B′ und C′ kommen, oder man kann jede beliebige Verschiebung eines Körpers zurückführen auf eine Translation und eine Drehung um eine Axe. Diess kann man überdiess auf beliebig viele Weisen ausführen. Unter diesen ist immer eine, bei welchen die Richtung der Translation und die Richtung der Drehaxe zusammenfallen.

Denkt man sich zuerst wie oben A nach A′ durch Translation gebracht und dann die Drehung ausgeführt, wobei N die Drehaxe sein soll. Betrachtet man einen Schnitt des Körpers F normal zu N, so wird dieser bei dieser Drehung nicht aus seiner Ebene kommen; während er bei der Translation parallel zu sich verschoben wurde. Schneidet man nun den Körper in der anfänglichen Lage durch eine Ebene normal zu N; dieser Schnitt heisse F; verschiebt man dann den Körper parallel mit N, so dass F nach F_1 kommt, in die Ebene, bei welcher dieser Schnitt nach der Drehung liegen

soll; so hat man endlich noch den Körper um eine zu N parallele Axe zu drehen um F_1 in die verlangte Lage F_2 zu bringen.

119. Lässt man diese Verschiebung und Drehung um eine Axe gleichzeitig und gleichförmig erfolgen, so beschreiben die einzelnen Punkte des Körpers Schraubenlinien.

Jede beliebige Bewegung eines Körpers wird sich hiernach aus unendlich kleinen Drehungen und Translationen nach der Drehaxe zusammengesetzt betrachten lassen, wobei jeden Augenblick die Drehaxe eine andere sein kann. Man nennt die Axe, um welche zu einem Zeitpunkte t die Drehung und Translation erfolgt, die augenblickliche Axe der Drehung und Verschiebung. Die Bahn jedes Punktes ist hierbei die Aufeinanderfolge von Elementen verschiedener Schraubenlinien.

120. Die stetige Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt kann man durch Betrachtungen wie in Nro. 115 auf das Rollen eines Kegels der mit dem Körper fest verbunden ist, auf einem zweiten unbeweglichen zurückführen. Die Spitze der beiden Kegel ist der feste Punkt; die jeweilige Berührungslinie beider Kegelflächen die augenblickliche Drehaxe.

121. Die stetige Bewegung eines Körpers kann man in zweierlei Weise betrachten.

Jede elementare Bewegung eines Körpers kann man zerlegen in Translation gleich der Bewegung eines Punktes und in Drehung um diesen Punkt. Hieraus ergibt sich, dass man die Bewegung eines Körpers betrachten kann als das Rollen eines mit dem Körper fest verbundenen Kegels auf einem zweiten, wobei beide Kegel zugleich eine gemeinschaftliche Translation haben.

Betrachtet man dagegen die momentane Axe der Drehung und Verschiebung, so kommt man zu dem Rollen und Verschieben nach der Drehaxe einer mit dem Körper fest verbundenen windschiefen Fläche auf einer zweiten unbeweglichen, welche der Ort der augenblicklichen Drehaxen ist.

Zusammensetzung der Bewegungen.

122. Wie jede Bewegung eines Punktes kann man auch die Bewegung eines Körpers aus zwei oder mehreren andern zusammen-

gesetzt denken. Zwei Translationen geben für jeden Punkt dieselbe parallele Verschiebung, setzen sich also zu einer Translation zusammen.

123. Ein Körper habe zugleich eine Translation und eine Rotation um eine zu der ersten rechtwinklichen Axe. Ist O diese Axe, so ziehe man eine Linie OM rechtwinklich auf die Axe und die Richtung der Translation. In OM wird sich ein Punkt M finden, welcher vermöge der Rotation dieselbe, aber entgegengesetzte Geschwindigkeit hat, welche der Translation zukommt. Vermöge Translation und Rotation ist M in Ruhe; es ist also die durch M zu O parallel gezogene Gerade die augenblickliche Drehaxe. Die Drehgeschwindigkeit aber muss so gross sein, dass durch sie die Axe O die Translationsgeschwindigkeit erhält. Die Drehung um M muss daher mit derselben Geschwindigkeit erfolgen, wie die um O. Beide Bewegungen Translation und Drehung um O lassen sich daher durch eine Drehung um M mit der früheren Drehgeschwindigkeit ersetzen.

Geschieht die Rotation nicht um eine Axe, die zur Translation normal ist, so kann man die Translation zerlegen normal und parallel zur Rotationsaxe, man erhält dann durch Zusammensetzung der ersten mit der Rotation eine gleichschnelle Rotation um eine der gegebenen Axe parallele, und ausserdem eine Translation parallel dieser Axe, also eine schraubenförmige Bewegung um diese Axe.

124. Zwei gleich gerichtete Rotationen um zwei parallele Axen geben eine Rotation in derselben Richtung um eine dritte zu der ersten parallele Axe. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit um die erste Axe A; ω_1 die Winkelgeschwindigkeit um die zweite Axe B und r die Entfernung beider Axen, so geht die Drehaxe, um welche sich der Körper dreht, durch r in der Entfernung

$$\frac{\omega_1}{\omega + \omega_1} r$$

von A weg, und die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega + \omega_1 .$$

Sind die Rotationen entgegengesetzt gerichtet, ω und

ω_1 die beiden Winkelgeschwindigkeiten und r die Entfernung beider Axen, so erhält man wieder als resultirend eine Rotation um eine Axe, welche den beiden gegebenen parallel ist, mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega - \omega_1 ,$$

wobei die Axe von A weg in der Entfernung

$$\frac{-\omega_1}{\omega - \omega_1} r$$

liegt. Diese Drehung erfolgt in der Richtung wie ω, wenn $\omega - \omega_1$ positiv ist, andernfalls wie ω_1 mit der Geschwindigkeit $\omega_1 - \omega$. Man sieht, dass man dieses Resultat in dem ersten enthalten erhält, wenn man die Winkelgeschwindigkeiten in gleicher Richtung als positiv, die in der entgegengesetzten aber als negativ in Rechnung zieht.

Sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten entgegengesetzt aber gleich gross, so ist das Resultat der Zusammensetzung eine Translation mit der Geschwindigkeit

$$r\omega$$

wenn ω die eine jener Winkelgeschwindigkeiten und r die Entfernung der Axen ist.

125. Zusammensetzung der Drehungen um sich schneidende Axen. Dreht sich ein Körper um eine Axe n mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher von n um ∂ wegliegt

$$\partial\omega .$$

Nimmt man nun drei auf einander rechtwinkliche Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz an, deren Ursprung in n liegt und für welche n in der Ebene x, y liegt, und sind x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes, ist m die Projection von ∂ auf die x, y Ebene; so kann man zuerst die Geschwindigkeit $\partial\omega$ zerlegen parallel z und rechtwinklich darauf; diese Componenten sind

$$-\partial\omega\cos(\partial, m) \text{ und } \partial\omega\sin(\partial, m).$$

Die letzte gibt nach x und y zerlegt die Seitengeschwindigkeiten

$$\partial\omega\sin(\partial, m)\sin(n, x) \text{ und } -\partial\omega\sin(\partial, m)\cos(n, x).$$

Nun ist aber

$$z = \partial \sin(\partial, m),$$

$$m = \partial \cos(\partial, m) = x \sin(n, x) - y \cos(n, x).$$

Dreht man um die x Axe mit der Geschwindigkeit $\omega \cos(n, x)$, so ergeben sich daraus für den Punkt dessen Coordinaten x, y, z sind, die Seitengeschwindigkeiten

nach $\quad x, \qquad y, \qquad z,$

$$0; \qquad -z\omega \cos(n, x); \qquad +y\omega \cos(n, x);$$

und eine Drehung um die y Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cos(n, y) = \omega \sin(n, x)$ gibt die Seitengeschwindigkeiten

$$z\omega \sin(n, x); \qquad 0; \qquad -x\omega \sin(n, x).$$

Durch diese beiden Drehungen erhält man für die Seitengeschwindigkeiten nach

$$x, \qquad y, \qquad z,$$

$$z\omega \sin(n, x); \quad -z\omega \cos(n, x); \quad y\omega \cos(n, x) - x\omega \sin(n, x),$$

welche mit den oben gegebenen Werthen von z und von m übergehen in

$$\partial \omega \sin(\partial, m) \sin(n, x); \quad -\partial \omega \sin(\partial, m) \cos(n, x)$$ und nach z

in $$-\partial \omega \cos(\partial, m),$$

das heisst in die Seitengeschwindigkeiten, welche der Drehung um n angehören, oder die Drehungen um die x und y Axe mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega \cos(n, x)$ und $\omega \cos(n, y)$ geben dem Punkte bei x, y, z dieselbe Geschwindigkeit, welche er durch die Drehung um n erhält, und da die Drehungen um x und y hierbei ganz unabhängig von x, y, z sind, so wird auch jeder andere Punkt durch diese Drehungen dieselbe Geschwindigkeit erhalten, wie durch die Drehung um n mit der Geschwindigkeit ω. Man kann daher eine Drehung um n mit der Winkelgeschwindigkeit ω ersetzen durch zwei andere um Axen, welche unter sich rechtwinklich und in derselben Ebene mit n liegen; die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen man um diese Axen drehen muss, findet man, wenn man die Winkelgeschwindigkeit ω auf die Richtung der Axe n aufträgt, und diese Länge dann auf die beiden Axen x und y projicirt. Die Projectionen sind die Winkelgeschwindigkeiten um diese Axen.

Man muss hierbei eine bestimmte Richtung der Drehung als

die positive annehmen. Wir denken uns in die Axe, so dass wir nach dem Körper hinsehen, dann nehmen wir die Drehung rechts, also in der Richtung, in welcher wir den Zeiger einer Uhr umlaufen sehen, als positiv an. Man kann sich bei jeder Drehung eines Körpers dahin gestellt denken, dass sich der Körper rechts dreht, wonach also auch nur diese eine Drehung in Betracht genommen werden könnte. Erhält man bei obiger Construction eine negative Projection, so heisst diess, der Körper dreht sich um diese Axe links, oder um die Verlängerung dieser Axe rechts.

126. Zwei Drehungen um sich schief schneidende Axen kann man zusammensetzen, indem man die eine zuerst in eine Drehung nach der zweiten Axe und rechtwinklich darauf zerlegt. Die beiden Drehungen nach derselben Axe geben eine einzige, mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich der Summe der Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Drehungen. Man erhält auf diese Weise als resultirende Drehung die, welche sich durch folgende Construction ergibt. Man trägt auf die beiden gegebenen Drehaxen die zu ihnen gehörenden Winkelgeschwindigkeiten, und beschreibt über diesen ein Parallelogramm. Die Diagonale dieses Parallelogramms gibt die Drehaxe durch ihre Lage und die resultirende Winkelgeschwindigkeit durch ihre Länge an.

127. Hat man drei unter sich rechtwinkliche, sich schneidende Axen, und Drehungen um diese zusammenzusetzen, so kann man diess, wie oben zuerst, für zwei Drehungen thun, und diese dann mit der dritten zusammensetzen. Man erhält so folgende Construction. Man trage auf jede der Axen die zu ihr gehörige Winkelgeschwindigkeit, beschreibe über diesen ein Parallelepiped und ziehe die Diagonale dieses Parallelepipeds aus dem Schnittpunkte der drei Axen. Diese gibt die Axe an, um welche sich der Körper dreht, und ihre Länge ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung.

Sind ω_x, ω_y, ω_z die drei Seitenwinkelgeschwindigkeiten, so ist die resultirende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

und die Richtung n der Drehaxe gegeben durch

$$\cos(n,x) = \frac{\omega_x}{\omega};\ \cos(n,y) = \frac{\omega_y}{\omega};\ \cos(n,z) = \frac{\omega_z}{\omega}. \quad (22)$$

Um die so bestimmte Drehaxe erfolgt die Drehung rechts.

Durch dieselbe Construction kann man eine gegebene Drehung um eine Axe in drei aufeinander rechtwinkliche Drehungen zerlegen.

Die Drehung der Erde erfolgt um die Erdaxe, und zwar um die vom Mittelpunkt zum Südpole gehende Axe rechts. Für einen Ort auf der nördlichen Erdhälfte, dessen Polhöhe β ist, zerlegt sich diese Drehung in eine um die Verticale des Orts gleich $-\omega \sin\beta$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung ist, und in eine durch den Schnittpunkt der Verticalen mit der Erdaxe gegen Süden gehende Horizontale mit der Winkelgeschwindigkeit $+\omega \cos\beta$. Um die Verticale drehen sich daher die an der Erdoberfläche ruhenden Gegenstände links, während sie sich zugleich um die oben bestimmte Horizontale rechts drehen.

128. Sollen zwei Drehungen um Axen, die nicht in einer Ebene liegen, zusammengesetzt werden, so zerlegt man die eine in eine Drehung um eine zu ihrer Axe parallele, welche die andere Axe durchschneidet, und in eine Translation, welche auf der Ebene der beiden parallelen Axen rechtwinklich steht. Setzt man die beiden Rotationen um die sich schneidenden Axen zusammen, so hat man eine Drehung und eine auf der Drehungsaxe nicht rechtwinkliche Translation, welches nach (Nro. 123) eine schraubenförmige Bewegung gibt.

129. Die allgemeinste Bewegung eines Körpers lässt sich auflösen in eine Aufeinanderfolge von unendlich kleinen schraubenförmigen Bewegungen; eine solche besteht aus einer Translation und einer Drehung um die Richtung der Translation. Die Translation lässt sich zerlegen in Translationen nach drei aufeinander rechtwinklichen Richtungen O x, O y, O z, und ebenso die Drehung in drei Drehungen um diese Axen. Ist w die Translationsgeschwindigkeit und ω die Drehgeschwindigkeit um die augenblickliche Axe der Verschiebung und Drehung, so gibt die erste die Translationen nach den drei Coordinatenaxen

$$w \cos(\omega, x); \quad w \cos(\omega, y); \quad w \cos(\omega, z).$$

Die Drehung gibt ebenso drei Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega \cos(\omega, x); \quad \omega \cos(\omega, y); \quad \omega \cos(\omega, z)$$

für drei zu den Coordinatenaxen parallele Axen, welche sich in einem Punkte der augenblicklichen Axe der Verschiebung und Drehung durchschneiden. Diese Drehungen kann man ersetzen durch Drehungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Coordinatenaxen und durch Translationen, welche auf der Ebene der beiden betreffenden Axen rechtwinklich sind. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes der augenblicklichen Axe der Verschiebung und Drehung, so erhält man die Translationen nach den drei Coordinatenaxen, welche durch die Verlegung der Drehaxen in diese bedingt sind

für die x Axe $y \omega \cos(\omega, z) - z \omega \cos(\omega, y)$,

„ „ y „ $z \omega \cos(\omega, x) - x \omega \cos(\omega, z)$,

„ „ z „ $x \omega \cos(\omega, y) - y \omega \cos(\omega, x)$.

Setzt man diese Translationen mit den von w herrührenden zusammen, so erhält man somit drei Translationen nach den drei Coordinatenaxen und drei Drehungen um diese, welche sechs Bewegungen, wenn die Lage der augenblicklichen Axe der Drehung und Verschiebung, wie auch die Drehungsgeschwindigkeit um sie und die Translation längs ihr ganz willkürlich bleiben sollen, als von einander ganz unabhängig betrachtet werden müssen.

Man wird also jede Bewegung eines Körpers zurückführen können auf drei veränderliche Translationen nach drei Coordinatenaxen und auf drei veränderliche Drehungen um diese.

Die relative Bewegung eines Punktes und das relative Gleichgewicht.

130. Bei der Betrachtung der Bewegung eines Körpers ist man sehr oft in der Lage, diese auf ein bewegtes Coordinatensystem zu beziehen, oder die Bewegung des ersten relativ gegen dieses zu betrachten. So beziehen wir bei allen Bewegungen an der Erdoberfläche diese gemeiniglich auf Coordinaten, die an der

Bewegung der Erde Theil nehmen. Wenn wir z. B. oben die Bewegung eines fallenden oder geworfenen schweren Körpers untersucht haben, und diese dabei auf verticale und horizontale Coordinaten bezogen haben, so war dabei vorausgesetzt, die Erde habe keine Bewegung und das gewählte Coordinatensystem sei ein unbewegtes. Diess ist aber in der That nicht der Fall, die Bewegung ist bezogen auf ein bewegtes Coordinatensystem, und man hat dort nur die relative Bewegung gegen dieses Coordinatensystem betrachtet, dabei aber die Sätze über die absolute Bewegung unmittelbar angewendet. War das ein richtiges Verfahren, oder werden durch die Beweglichkeit des Coordinatensystems Aenderungen in den bisher gebrauchten Formeln nothwendig, um die relative Bewegung gegen ein solches Coordinatensystem zu erhalten? Diese Frage soll hier untersucht werden.

131. Die allgemeinste Bewegung, welche das Coordinatensystem haben kann, gegen welches die relative Bewegung untersucht werden soll, ist die allgemeinste Bewegung eines festen Körpers, welche nach (Nro. 129) immer auf eine veränderliche Translation und eine veränderliche Drehung zurückgeführt werden kann. Wir betrachten zuerst die Translation für sich, und stellen uns die Aufgabe, die relative Bewegung einer Masse m gegen ein mit sich parallel fortbewegtes Coordinatensystem anzugeben.

Hierzu seien die Axen des beweglichen Coordinatensystems Ox, Oy, Oz; die Coordinaten der bewegten Masse zur Zeit t gleich x, y, z.

Die Bewegung des Coordinatensystems selbst sei bezogen auf drei zu ihm parallele, aber unbewegliche Coordinatenaxen, und gegeben durch die Coordinaten des Ursprungs O gleich a, b, c zur Zeit t, während die Coordinaten der Masse m zu dieser Zeit x', y', z' heissen sollen. Damit hat man

$$x' = a + x; \quad y' = b + y; \quad z' = c + z,$$

und die Beschleunigungen für die absoluten Bewegungen

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Aus diesen Beschleunigungen findet man die Componenten der bewegenden Kraft nach den betreffenden Richtungen durch Multiplication mit der bewegten Masse. Bezeichnet man die Componenten der bewegenden Kraft nach den Richtungen x, y, z mit P_x, P_y, P_z, so erhält man hiernach

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P_x - m\frac{d^2a}{dt^2};\ m\frac{d^2y}{dt^2} = P_y - m\frac{d^2b}{dt^2};$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = P_z - m\frac{d^2c}{dt^2}. \tag{23}$$

Ist die Bewegung eine unfreie, so hat man die Effectivkraft für P zu setzen. Diese Gleichungen sagen, man findet die relativen Beschleunigungen und damit auch die relativen Bewegungen, wenn man zu der bewegenden Kraft P eine zweite Kraft bringt, welche der Masse m die entgegengesetzte Bewegung des Ursprungs des beweglichen Coordinatensystems ertheilte; oder welche der Masse m und dem Axensystem die entgegengesetzte Bewegung von der ertheilt, welche das Axensystem schon hat. Durch beide würde das Axensystem zur Ruhe gebracht, und also die relative Bewegung in eine absolute verwandelt.

Soll die Masse m in relativer Ruhe gegen das Axensystem sein, oder eine gleichförmige, geradlinige Bewegung gegen dasselbe haben, so muss

$$P_x = m\frac{d^2a}{dt^2};\ P_y = m\frac{d^2b}{dt^2};\ P_z = m\frac{d^2c}{dt^2}$$

sein. Die Kraft P, welche erfordert wird, um die relative Ruhe herzustellen, nenne ich die Führungskraft für dieses Axensystem und damit lässt sich der obige Satz so aussprechen:

Um die relative Bewegung zu erhalten, muss man zu der bewegenden Kraft die entgegengesetzte Führungskraft des Axensystems an der bewegten Masse anbringen.

132. Aufgabe a. Eine horizontale Platte sinkt mit der Beschleunigung f vertical abwärts; auf ihr liegt eine schwere Masse m; welches ist der Druck dieser Masse auf die Platte?

Die Masse ist relativ gegen die Platte in Ruhe. Auf sie wirkt

ihr Gewicht m g und der vertical aufwärts gehende Gegendruck der Platte, N. Damit erhält man

$$0 = mg - N - mf,$$

woraus der Druck

$$N = m(g - f).$$

Bewegt sich die Platte gleichförmig, so ist $f = 0$ und der Druck auf die Platte dem ganzen Gewichte der Masse m gleich. Bei einer Beschleunigung ist der Druck der Masse auf die Platte um so kleiner, je grösser die Beschleunigung ist; für $f = g$ erleidet die Platte keinen Druck. Ist die Beschleunigung negativ, d. h. nimmt die Geschwindigkeit der Platte vertical abwärts ab, so wird der Druck der Masse m grösser als sein eigenes Gewicht.

Aufgabe b. Zwei Massen m und m_1 ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft $m m_1 . f_r$ an, wo f_r eine Funktion der gegenseitigen Entfernung ist; die Bewegung der Masse m_1 relativ gegen m zu bestimmen.

Nimmt man in der einen Masse m den Ursprung der Coordinaten x, y, z, und sind zur Zeit t die Coordinaten von m_1 gleich x, y, z, so hat man

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -m m_1 f_r . \frac{x}{r} - m_1 \frac{d^2a}{dt^2},$$

wo $\frac{d^2a}{dt^2}$ die absolute Beschleunigung des Ursprungs der Coordinaten, also der Masse m in der Richtung von x ist. Aus der auf m wirkenden Kraft erhält man aber unmittelbar

$$m \frac{d^2a}{dt^2} = m m_1 f_r . \frac{x}{r}.$$

Wird daraus die Beschleunigung des Ursprungs der Coordinaten in die obige Gleichung substituirt, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(m + m_1) f_r \frac{x}{r}.$$

Die relative Beschleunigung ist dieselbe, als ob an der Stelle der bewegten Masse m die Masse $m + m_1$ und die Bewegung eine absolute wäre, d. h. die Masse $m + m_1$ und der Anfang der Coordinaten ruhen würden.

Die relative Bewegung ist eine centrale und es gelten für sie die in Nro. 75 und 79 aufgestellten Gesetze der Centralbewegung.

133. Dreht sich das Axensystem, auf welches man die Bewegung bezieht, mit der Winkelgeschwindigkeit w um die z Axe, so kann man zuerst die Bewegung wieder auf ein unbewegtes Axensystem Ox', Oy' und Oz' beziehen, dessen Ursprung und z Axe mit dem bewegten Systeme zusammenfällt. Zerlegt man dann für freie Bewegung die bewegende Kraft oder für nicht freie die Effectivkraft E nach z, nach dem auf z rechtwinklichen, also in der Ebene x, y oder x', y' liegenden Vector r und normal zu beiden nach n, so hat man nach Nro. 68

$$E \cos(E, z) = m \frac{d^2 z}{dt^2},$$

$$E \cos(E, r) = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega_0^2\right),$$

$$E \cos(E, n) = m \left(2 \frac{dr}{dt} \omega_0 + r \frac{d\omega_0}{dt}\right),$$

wo unter ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Masse gegen das ruhende Axensystem verstanden ist.

Ist ω die relative Winkelgeschwindigkeit gegen das bewegte Axensystem, so hat man

$$\omega_0 = \omega + w$$

und daraus

$$E \cos(E, r) = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r (\omega + w)^2\right)$$

und

$$E \cos(E, n) = m \left(2 \frac{dr}{dt} (\omega + w) + r \frac{d(\omega + w)}{dt}\right).$$

Hieraus findet man die Gleichungen für die relative Bewegung

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2\right) &= E \cos(E, r) + m (r w^2 + 2 r w \omega), \\ m \left(2 \frac{dr}{dt} \omega + r \frac{d\omega}{dt}\right) &= E \cos(E, n) - m \left(r \frac{dw}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} w\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit r, so lässt sie sich auch schreiben

$$m\frac{d(r^2\omega)}{dt} = E\,r\cos(E,n) - m\frac{d(r^2 w)}{dt^2}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Effectivkräfte nach dem Vector r und rechtwinklich darauf, nebst dem statischen Momente der Effectivkraft für die Axe z, wie sie die relative Bewegung erforderte, wenn das Axensystem unbewegt wäre; E_r und E_n sind die in der That vorhandenen Effectivkräfte, und die übrigen Glieder rechts enthalten die entgegengesetzten Führungskräfte, welche man zu E_r und E_n zusetzen muss, um die Effectivkräfte der relativen Bewegung, d. h. die Producte aus der Masse in die relativen Beschleunigungen zu erhalten. Man sieht, dass man von den Effectivkräften der relativen Bewegung zu denen der absoluten kommt, wenn man in jenen $\omega + w$ für ω setzt.

Bewegt sich die Masse geradlinig und gleichförmig, so erfordert eine solche absolute Bewegung keine bewegende Kraft; die Führungskräfte werden daher die sein, welche bei der relativen gleichförmigen und geradlinigen Bewegung nothwendig sind, um die hierbei stattfindende absolute Bewegung zu geben.

134. Die beiden Führungskräfte $m.2r\omega w$ und $-m.2\frac{dr}{dt}w$ kann man zu einer einzigen zusammensetzen, welche rechtwinklich auf der Projection der relativen Geschwindigkeit v auf die x, y Ebene steht, und welche

$$m.2v\sin(v,z).w$$

ist, wo $v\sin(v,z)$ eben jene Projection ist.

Bezeichnet man diese Kraft mit F, so muss

$$F\cos(F,r) = m.2r\omega w$$

und

$$F\cos(F,n) = -m.2\frac{dr}{dt}w$$

sein, woraus sich

$$F = m.2w\sqrt{r^2\omega^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

gibt, was gleich

$$m.2wv\sin(v,z)$$

ist.

Bezeichnet man diese Projection $v \sin(v, z)$ durch v', so hat man

$$\cos(F, r) = \frac{m . 2 r \omega w}{F} = \frac{r \omega}{v'} = \cos(v', n)$$

und

$$\cos(F, n) = -\frac{m . 2 \frac{dr}{dt} w}{F} = -\frac{\frac{dr}{dt}}{v'} = -\cos(v', r),$$

woraus der Winkel

$$(F, v') = \frac{\pi}{2}$$

sich ergibt, oder die Kraft F steht rechtwinklich auf der Geschwindigkeit v' und also auch rechtwinklich auf v.

Ueber die Richtung der Kraft F belehren die Componenten von F. Man sieht, dass (F, r) ein spitzer Winkel sein muss, wenn ω und w dasselbe Zeichen haben, andernfalls ein stumpfer; oder auch F, n wird ein stumpfer Winkel, wenn w und $\frac{dr}{dt}$ dasselbe Zeichen haben, andernfalls ein spitzer; es wirkt also diese Kraft dem w entgegen, wenn die Entfernung r wächst; nähert sich dagegen der Körper der Axe, so liegt F auf der Seite von r, auf welcher w liegt.

135. Um also die relative Bewegung gegen ein sich drehendes Axensystem zu bestimmen, hat man zu der bewegenden Kraft und zu dem etwa vorhandenen Widerstande der Bahn hinzuzusetzen:

a) Die Centrifugalkraft $m r w^2$ in der Richtung des Vectors r.

b) Die Kraft $m r \frac{dw}{dt}$, welche der Masse m die entgegengesetzte Winkelbeschleunigung des Axensystems gibt. Sie liegt normal zu dem Vector r und der angenommenen Drehungsrichtung entgegen.

c) Die Kraft $2 m w v \sin(v, z)$ rechtwinklich auf die Projection der Geschwindigkeit v in der zur Drehaxe normalen Ebene. Die Seite, nach welcher diese Kraft anzubringen ist, erkennt man gewöhnlich vom einfachsten aus ihrer Componente nach dem Vector, welche

$$2 m r \omega w$$

ist.

Diese Kraft nennt man zuweilen die zusammengesetzte Centrifugalkraft.

Aus der Ableitung in Nro. 133 geht hervor, dass diese Sätze auch dann noch gelten, wenn sich das Axensystem nur momentan um eine Axe dreht.

136. Findet neben der Drehung des Axensystems zugleich Translation desselben mit den Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$$

nach den Richtungen x′, y′, z′ statt, so findet man, dass man zu den entgegengesetzten Führungskräften der Drehung noch die in Nro. 131 bestimmten der Translation

$$-m\frac{d^2a}{dt^2}, \; -m\frac{d^2b}{dt^2}, \; -m\frac{d^2c}{dt^2}$$

nach den Richtungen x′, y′, z′ zusetzen müsse, um die Effectivkräfte der relativen Bewegung zu erhalten.

137. Nachdem die entgegengesetzten Führungskräfte zugesetzt sind, erhält man die relative Bewegung als eine absolute, und es gelten also dann alle Sätze über die absolute Bewegung auch hier. Der Satz von der Arbeit wird

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} E\cos(E, ds)\,ds$$

wo v und v_0 die relativen Geschwindigkeiten und E die Effectivkraft der relativen Bewegung ist, und das Integral rechts die Arbeit dieser Effectivkraft auf dem relativen Wege von s_0 und s.

Die Arbeit einer Kraft ist die Summe der Arbeiten ihrer Componenten.

Diese sind für die Effectivkraft die bewegende Kraft, der etwa vorhandene Widerstand der Bahn, und endlich die entgegengesetzten Führungskräfte der Translation und der Drehung des Coordinatensystems.

Die Arbeit der entgegengesetzten Führungskraft der Translation sei 𝔄.

Die Arbeit der Centrifugalkraft ist

$$m\int r w^2 dr,$$

was für den Fall einer gleichförmigen Drehung des Axensystems in

$$\tfrac{1}{2} m w^2 (r^2 - r_0^2)$$

übergeht, wenn die bewegte Masse von der Entfernung r_0 bis r von der Drehaxe sich entfernt.

Die Arbeit der zweiten in Nro. 135 aufgeführten Kräfte ist

$$-m \int r \frac{dw}{dt} r \, d\varphi ;$$

sie wird für das gleichförmig sich drehende Axensystem gleich Null.

Die dritte der Führungskräfte der Drehung endlich gibt keine Arbeit, da sie stets rechtwinklich auf der Bahn des bewegten Körpers liegt.

Damit hat man

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \int_{s_0}^{s} P \cos(P, ds)\, ds + \mathfrak{A} + m \int_{r_0}^{r} w^2 r \, dr -$$

$$- m \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 \frac{dw}{dt} d\varphi , \qquad (25)$$

und für den Fall der gleichförmigen Drehung des Axensystems

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \int_{s_0}^{s} P \cos(P, ds)\, ds + \mathfrak{A} + \tfrac{1}{2} m w^2 (r^2 - r_0^2) .$$

In diesen Formeln ist ein etwa vorhandener tangentialer Widerstand der Bahn unter P mit begriffen; der normale Widerstand gibt keine Arbeit.

Ist bei gleichförmiger Drehung des Axensystems keine bewegende Kraft und kein tangentialer Widerstand vorhanden, so ist

$$v^2 - v_0^2 = w^2 (r^2 - r_0^2).$$

138. Relatives Gleichgewicht findet statt, wenn die Effectivkraft der relativen Bewegung Null wird. Dazu ist erforderlich, dass mit den bisher gebrauchten Bezeichnungen

$$E_x = P_x - m \frac{d^2 a}{dt^2} + m r w^2 \cos(r, x) - m r \frac{dw}{dt} \cos(n, x) +$$

$$+ m . 2 r w \omega \cos(r, x) - m . r \frac{dr}{dt} w \cos(n, x) = 0. \qquad (26)$$

ist und dieselben Gleichungen für die y und z Axe gelten.

Soll relative Ruhe statt finden, so ist ω und $\frac{dr}{dt}$ gleich Null und die beiden letzten Glieder verschwinden.

Aufgaben über die relative Bewegung.

a. Eine Rotationsfläche dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit w um ihre vertical stehende Axe; auf ihrer hohlen nach oben gekehrten Seite liegt eine schwere Masse m; wo muss diese Masse liegen, damit sie in relativer Ruhe gegen die Rotationsfläche bleibt.

139. Nimmt man die Axe der Fäche als die nach oben gehende Axe der z, und nennt man r den Vector des Meridians der Fläche, so hat man für die Richtung z als Bedingung der Ruhe, wenn N der normale Widerstand der Bahn ist.

$$0 = -mg + N\frac{dr}{\sqrt{dr^2 + dz^2}},$$

und für die Richtung r oder x

$$0 = -N\frac{dz}{\sqrt{dr^2 + dz^2}} + mrw^2.$$

Setzt man den Winkel, welchen das Element der Meridiancurve bei z, r mit der Axe der z bildet gleich φ, so sind diese Gleichungen

$$mg = N\sin\varphi \quad \text{und} \quad mrw^2 = N\cos\varphi, \text{ und}$$

man erhält für die Lage von m

$$\tan\varphi = \frac{g}{rw^2}$$

und den Druck auf die Bahn

$$N = m\sqrt{g^2 + r^2 w^4}.$$

b. Die Schwerkraft an der Erdoberfläche.

140. Die Erde dreht sich in einem Sterntage um ihre Axe; wir drehen uns mit ihr und beziehen desshalb meistens die Bewegungen an der Erdoberfläche, namentlich den Fall der Körper auf ein Axensystem, das fest mit der Erde verbunden ist, und deren Drehung von Westen nach Osten mitmacht. Die Schwerkraft ist

die Effectivkraft bei der relativen Bewegung eines fallenden Körpers gegen dieses mit der Erde festverbundene Axensystem; die bewegende Kraft ist die Anziehungskraft der Erde.

Die Drehung der Erde erfolgt in 86164 Secunden mittlerer Zeit; daraus erhält man die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung für eine solche Secunde

$$w = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729.$$

Wir nehmen nun die Axe der Erde als die z Axe, welche wir, damit die Drehung eine Rechtsdrehung wird, gegen den Südpol hin nehmen; durch den Körper, der in relativer Ruhe sein soll, gehe die Ebene der x, z. Die Anziehung der Erde, von welcher hier angenommen wird, sie liege in der Ebene x, z, zerlegen wir nach x und z und bezeichnen die Componenten mit

$$m A_x \text{ und } m A_z .$$

Für die relative Ruhe hat man dann

$$0 = N_z + m A_z$$
$$0 = N_x + m A_x + m x w^2,$$

wo N der Widerstand ist, welchen man dem Körper entgegensetzen muss, um ihn in relativer Ruhe zu erhalten. Dieser Widerstand ist gleich dem entgegengesetzten Gewichte des Körpers mg, seine Richtung ist der relativen Bahn eines frei fallenden schweren Körpers an dieser Stelle, der Verticalen direct entgegengesetzt. Ist nun $\pi - \beta$ der Winkel dieser Verticalen mit der Axe der x, wo β die Polhöhe an der Stelle x, z ist, so ist

$$N_z = - m g \sin\beta \text{ und } N_x = m g \cos\beta .$$

Damit werden obige Gleichungen

$$A_z = + g \sin\beta \text{ und } A_x = - g \cos\beta - x w^2 .$$

Die Richtung der Anziehung der Erde findet man damit

$$\tan(A, x) = \frac{A_z}{A_x} = - \frac{g \sin\beta}{g \cos\beta + x w^2} .$$

Da nun selbst am Aequator

$$\frac{x w^2}{g} \text{ nur gleich } \frac{1}{289}$$

wird, und also für grössere Polhöhen noch kleiner wird, so kann man setzen

$$\tan(A,x) = -\tan\beta\left(1 - \frac{x w^2}{g\cos\beta}\right)$$

und

$$\tan(A,x) = \tan(\pi - \beta - \delta) = \tan(\pi - \beta) - \frac{1}{\cos\beta^2}\delta,$$ woraus

$$\delta = -\frac{x w^2 \sin\beta}{g}$$

wird.

Es fällt also die Richtung der Anziehungskraft der Erde sehr nahe mit der Richtung der Schwerkraft zusammen, die Abweichung geht auf der Nordhälfte der Erde gegen Norden, auf der Südhälfte gegen Süden. Da x für einen Punkt der Erdoberfläche nahe gleich $r\cos\beta$ ist, wo r die Entfernung dieses Punktes vom Erdmittelpunkt ist, so hat man

$$\delta = -\frac{r w^2}{2g}\sin 2\beta$$

was am grössten wird für $\beta = 45°$ und dort ungefähr der Bogen zu 6 Minuten wird.

Die Grösse der Anziehungskraft der Erde selbst findet man

$$\begin{aligned} A &= A_x \cos(A,x) + A_z \sin(A,x) \\ &= -(g\cos\beta + x w^2)\cos(\pi - \beta - \delta) + g\sin\beta\sin(\pi - \beta - \delta) \\ &= g\cos\delta + x w^2 \cos(\beta + \delta), \end{aligned}$$

oder wenn man, wie oben die höheren Potenzen von δ gegen 1 weglässt und im zweiten Gliede noch $\sin\beta\delta$ gegen $\cos\beta$

$$A = g + x w^2 \cos\beta.$$

Die Schwerkraft g für die Masseneinheit erscheint hier als die Resultirende aus der Anziehungskraft der Erde und der Centrifugalkraft $x w^2$, welche der Umdrehung der Erde zukommt. An den Polen fällt g mit A zusammen, weil dort x gleich Null wird; am kleinsten wird g am Aequator, wo x und $\cos\beta$ die grössten Werthe haben, und zugleich A wegen der Gestalt der Erde am kleinsten wird.

c. Die Bewegung schwerer Körper an der Erdoberfläche.

141. Nimmt man die Coordinatenaxen und die Bezeichnungen der vorhergehenden Nummer an, so hat man, wenn x, y, z die Coordinaten der bewegten Masse m zur Zeit t sind, wo y gegen Osten gemessen sein soll,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mA_x + N_x + mxw^2 + 2m\frac{dy}{dt}w,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mA_y + N_y + myw^2 - 2m\frac{dx}{dt}w,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mA_z + N_z.$$

Die zwei letzten Glieder in den beiden ersten Gleichungen sind die Componenten der Kraft

$$2mwv\sin(v,z) = 2mwv'$$

(Nro. 135), welche rechtwinklich auf v und der Drehaxe steht, nach x und y, wie man sich leicht überzeugt, wenn man bedenkt, dass

$$v'\cos(v',x) = \frac{dy}{dt} \text{ und } v'\cos(v',y) = -\frac{dx}{dt}$$

ist.

Setzt man nun voraus, die Schwerkraft behalte an allen Orten der hier betrachteten relativen Bewegung merklich dieselbe Lage gegen das Coordinatensystem, und nimmt man überdiess die Schwere als constant für die ganze Ausdehnung dieser Bewegung an, so hat man nach der vorher gehenden Nummer

$$A_z = g\sin\beta;\ A_y = 0 \text{ und } A_x = -g\cos\beta - xw^2,$$

wobei aber noch $y\omega^2$ ebenfalls Null gesetzt werden muss, indem seine Beibehaltung die Veränderlichkeit der Grösse und Richtung der Schwere an den verschiedenen Stellen der Bahn bedingen würde.

Mit diesen Werthen werden obige Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos\beta + N_x + 2m - \frac{dy}{dt}w,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = N_y - 2m\frac{dx}{dt}w,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg\sin\beta + N_z.$$

Beziehen wir nun die Bewegung der grösseren Anschaulichkeit wegen auf ein ebenfalls mit der Erde fest verbundenes, aber verticales und horizontales Axensystem. Als Ursprung der Coordinaten nehmen wir einen Punkt der Erdaxe, die z' vertical aufwärts, x' gegen Süden, während die y wie bisher bleiben. Man hat damit

$$x' = x \sin\beta + z \cos\beta \text{ und } z' = x \cos\beta - z \sin\beta,$$

woraus man mit

$$N_x \sin\beta + N_z \cos\beta = N_{x'} \text{ und}$$
$$N_x \cos\beta - N_z \sin\beta = N_{z'}$$

die Gleichungen erhält

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = N_{x'} + 2mw\frac{dy}{dt}\sin\beta, \tag{a}$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = -mg + N_{z'} + 2mw\frac{dy}{dt}\cos\beta \tag{b}$$

und

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = N_y - 2mw\left[\frac{dx'}{dt}\sin\beta + \frac{dz'}{dt}\cos\beta\right]. \tag{c}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Bewegung eines schweren Körpers an der Erdoberfläche, die relative Bewegung gegen Süden, die Verticale und gegen Osten.

d. Bewegung eines schweren Körpers auf einer Horizontalebene.

142. Setzt man in den vorhergehenden Gleichungen z' constant, setzt man voraus, die Horizontalebene leiste keinen tangentialen Widerstand gegen die Bewegung, so werden die Gleichungen (a) und (c) der vorhergehenden Nummer

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2w\sin\beta\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2w\sin\beta\frac{dx'}{dt}.$$

Beide geben durch Integration

$$\frac{dx'}{dt} = 2w\sin\beta.y + a; \quad \frac{dy}{dt} = -2w\sin\beta.x' + b,$$

wo a und b die Integrationsconstanten sind. Substituirt man den erhaltenen Werth von $\frac{dy}{dt}$ in die erste der betrachteten Gleichungen, so wird diese

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -4w^2\sin\beta^2.x' + 2w\sin\beta.b,$$

wovon das allgemeine Integral, wenn man

$$2\,w \sin\beta = k \text{ setzt,}$$

$$x' = A\cos kt + B\sin kt + \frac{b}{k}$$

ist. Damit gibt dann die obige Gleichung

$$y = -A\sin kt + B\cos kt - \frac{a}{k}.$$

Zur Bestimmung der Constanten sei der Ausgangspunkt der x' und y dort genommen, wo sich der Körper zur Zeit Null befindet. Diess gibt

$$A = -\frac{b}{k} \text{ und } B = \frac{a}{k}$$

und damit

$$x' = \frac{b}{k}(1 - \cos kt) + \frac{a}{k}\sin kt,$$

$$y' = \frac{b}{k}\sin kt - \frac{a}{k}(1 - \cos kt). \qquad \text{(d)}$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit wird

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = b^2 + a^2 \qquad \text{(c)}$$

constant. a und b sind die anfänglichen Geschwindigkeiten in den Richtungen von x' und y.

Setzt man

$$x' - \frac{b}{k} = = x_1 \text{ und } y + \frac{a}{k} = y_1,$$

so wird

$$x_1 = -\frac{b}{k}\cos kt + \frac{a}{k}\sin kt$$

$$y_1 = \frac{b}{k}\sin kt + \frac{a}{k}\cos kt, \text{ und man erhält}$$

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = \frac{a^2 + b^2}{k^2}; \qquad \text{(f)}$$

die Bahn des Körpers ist daher ein Kreis, dessen Mittelpunkt bei

$$x' = \frac{b}{k} \text{ und } y = -\frac{a}{k}$$

liegt, und dessen Radius $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{k}$ ist. Die Zeit, in welcher dieser Kreis durchlaufen wird, ist

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2 w \sin\beta} = \frac{86164}{2 \sin\beta} \text{ mittlere Secunden},$$

oder ein Sterntag dividirt durch den doppelten Sinus der Polhöhe.

Die Abweichung von der anfänglichen Richtung geht immer für den Beschauer, welcher dem Körper nachsieht zur Rechten, ist aber begreiflich sehr klein für die ersten Secunden, da sie nur der Sinus versus des beschriebenen Bogens ist.

Den Druck auf die Horizontalebene findet man

$$N_{z'} = m g - 2 m w b \cos\beta + 2 m x' w^2 \sin 2\beta,$$

oder also anfänglich

$$N_{z'} = m g - 2 m w b \cos\beta$$

und natürlich für einen ruhenden Körper

$$N_{z'} = m g.$$

e. Der Fall eines schweren Körpers ohne relative Anfangsgeschwindigkeit.

143. Ist N der Widerstand der Luft, so liegt dieser immer der Richtung der Bewegung entgegen, und ist eine Function der relativen Geschwindigkeit, da die Luft an der Rotation der Erde Theil nimmt. Da ein Körper, welcher von der relativen Ruhe ausgeht, sehr nahe in der durch seinen Ausgangspunkt gehenden Verticalen bleiben muss, so werden die Componenten von N nach horizontalen Richtungen sehr klein werden. Wir vernachlässigen diese beiden Componenten. Damit gibt die Gleichung (c Nro. 141)

$$\frac{dy}{dt} = -2 w [x' \sin\beta + z' \cos\beta) + \text{Const}.$$

Setzt man für den Ausgangspunkt des Falls

$$\frac{dy}{dt} = 0; \quad x' = 0; \quad z' = h,$$

so wird

$$\frac{dy}{dt} = 2 w [(h - z') \cos\beta - x' \sin\beta],$$

wofür man, weil x' sehr klein gegen die verticale Fallhöhe $(h - z')$ ist, setzen kann

$$\frac{dy}{dt} = 2 w (h - z') \cos\beta. \qquad (g)$$

Diese östliche Geschwindigkeit ist der doppelte Ueberschuss

der absoluten östlichen Geschwindigkeit, welche ein in der Höhe h liegender, mit der Erde verbundener Körper hat, über die östliche Geschwindigkeit des in der Höhe z' liegenden.

Vernachlässigt man den Luftwiderstand, so gibt die Gleichung (b)

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = -g + 4 w^2 (h - z') \cos\beta^2 .$$

Setzt man hier in dem letzten Gliede, als einem wegen der Factors w^2 sehr kleinen, den jedenfalls nahe richtigen Werth

$$h - z' = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

so erhät man

$$\frac{dz'}{dt} = -g t + \tfrac{2}{3} g w^2 t^3 \cos\beta^2,$$

wozu keine Constante kommt, da die Geschwindigkeit für $t = 0$ selbst Null werden soll. Daraus wird

$$h - z' = \tfrac{1}{2} g t^2 - \tfrac{1}{6} g w^2 t^4 \cos\beta^2, \tag{h}$$

wo die Constante so bestimmt ist, dass $z' = h$ wird für $t = 0$. Die Fallhöhe wird also etwas kleiner, als diess bei ruhender Erde und demselben g der Fall wäre.

Lässt man das sehr kleine Glied mit dem Factor w^2 weg, so gibt die Gleichung (g)

$$\frac{dy}{dt} = g w \cos\beta . t^2,$$

woraus die östliche Abweichung

$$y = \tfrac{1}{3} g w \cos\beta . t^3 = \tfrac{2}{3} w \cos\beta . h' \sqrt{\frac{2h'}{g}} \tag{k}$$

sich ergibt, in welcher h' die Fallhöhe $h - z'$ ist.

Für die südliche Abweichung findet man

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = 2 w \frac{dy}{dt} \sin\beta,$$

woraus
$$\frac{dx'}{dt} = 2 w y \sin\beta$$

und
$$x' = \tfrac{1}{6} w^2 g . \sin\beta \cos\beta t^4 = \tfrac{4}{9} w^2 \frac{h'^2}{g} \sin 2\beta \tag{l}$$

sich ergibt. Man sieht, dass x' ein Kleines höherer Ordnung als die östliche Abweichung y ist.

Will man den Widerstand der Luft berücksichtigen, so kann man nach der Formel am Ende der Aufgabe c in Nro. 57, pag. 33

$$h' = \tfrac{1}{2} g t^2 \left[1 - \frac{5}{12}\left(\frac{g t}{a}\right)^2\right]$$

setzen, wenn man voraussetzt, der fallende Körper sei sehr dicht, und hinreichend gross, um a gross gegen g t zu geben. Damit wird aus (g)

$$y = 2 w \cos\beta \left[\frac{1}{6} g t^3 - \frac{1}{24}\frac{g^3 t^5}{a^2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3} w \cos\beta \left[g t^2 - \frac{1}{4}\frac{g^3 t^4}{a^2}\right] t.$$

Nun ist

$$g t^2 - \frac{1}{4}\frac{g^3 t^4}{a^2} = \frac{6}{5} h' + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} g t^2,$$ oder wenn man

$$\tfrac{1}{2} g t^2 = h_1$$

setzt

$$y = \tfrac{1}{3} w \cos\beta \left[\frac{4}{5} h_1 + \frac{6}{5} h'\right] t. \qquad \text{(m)}$$

Zur Berechnung dieses Werthes von y muss die Fallzeit t und die Fallhöhe h′ beobachtet sein. Bei den Versuchen von Reich in Freiberg war die Fallhöhe $h' = 158^m,5407$, die Fallzeit 360,59 Tertien; die Polhöhe $\beta = 50^\circ 53' 22'',81$; die aus der Fallzeit berechnete Fallhöhe im leeren Raume $h_1 = 177^m,1372$. Damit ergibt sich die östliche Abweichung

$$y = 0{,}003058 \text{ Meter oder } 30{,}58 \text{ Millimeter;}$$

die Formel (k), welche den Luftwiderstand nicht berücksichtigt, gibt dagegen die östliche Abweichung

27,64 Millimeter,

während das Mittel aus allen Beobachtungen 28,3 Millimeter war.

Die südliche Abweichung wird nach obigen Formeln nur 0,004 Millimeter und erklärt daher die beobachtete, übrigens unsichere Abweichung von 4,4 Millimeter nicht.

f. Das Foucault'sche Pendel.

144. Diess ist das einfache Pendel betrachtet mit Rücksicht auf die Umdrehung der Erde. Lässt man die Axe der z′ durch den Aufhängepunkt des Pendels gehen, beachtet man den Luftwider-

stand nicht, so ist N in den Formeln der (Nro. 141) der Zug des Fadens, welcher durch den Aufhängepunkt des Pendels geht, dessen Coordinaten

$$z' = h, \; y = 0 \text{ und } x' = 0$$

sind. Ist l die Länge des Pendels, so ist

$$N_{z'} = +N\frac{h-z'}{l}; \; N_y = -N\frac{y}{l}; \; N_{x'} = -N\frac{x'}{l},$$

womit die Gleichungen a, b, c in Nro. 141 werden

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -N\frac{x'}{l} + 2mw\frac{dy}{dt}\sin\beta,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2mw\left[\frac{dx'}{dt}\sin\beta + \frac{dz'}{dt}\cos\beta\right],$$

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = -mg + N\frac{h-z'}{l} + 2mw\frac{dy}{dt}\cos\beta.$$

Die Behandlung kann hier dieselbe sein, wie beim conischen Pendel (Nro. 99). Wir betrachten nur die Bewegung in der Horizontalprojection, und diese nur, wenn das Pendel sich nur sehr wenig von der Verticalen entfernt.

Eliminirt man N zwischen den beiden ersten Gleichungen, so erhält man

$$x'\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x'}{dt^2} = -2w\left[x'\frac{dx'}{dt}\sin\beta + x'\frac{dz'}{dt}\cos\beta + y\frac{dy}{dt}\sin\beta\right].$$

Bei sehr kleinen Schwingungen um die Verticale ist $\frac{dz'}{dt}$ sehr klein gegen $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$; vernachlässigt man das erste gegen diese, so lässt sich die Gleichung integriren; man findet

$$x'\frac{dy}{dt} - y\frac{dx'}{dt} = -w(x^2 + y^2)\sin\beta + \text{Const.}$$

Setzt man hier

$$x' = r\cos\varphi \text{ und } y' = r\sin\varphi,$$

so wird die obige Gleichung

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = -wr^2\sin\beta + \text{Const.}$$

Nimmt man nun an, das Pendel sei dadurch in Bewegung gesetzt

worden, dass es in der Ruhelage einen Stoss erhalten habe, so hat man, weil hier $r = o$ ist, die Constante gleich Null und also

$$\frac{d\varphi}{dt} = -w \sin\beta,$$

d. h. die Verticalebene, in welcher sich das Pendel befindet, dreht sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $w \sin\beta$ der Bewegung der Erde entgegen, d. h. von Ost durch Süd nach West.

Diess ist die bekannte Erscheinung; sie erklärt sich anschaulich dadurch, dass die Verticale durch den Aufhängepunkt an der Drehung der Erde Theil nimmt, und diese Drehung wird das ruhende Pendel auch haben; zugleich dreht sich aber die Erde um diese Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $w \sin\beta$ (Nro. 127). Wird das Pendel durch einen Stoss in Bewegung gesetzt, so wird die Schwingungsebene gegen diese letzte Drehung unbeweglich sein, und daher ihr entgegen mit gleicher Geschwindigkeit sich zu drehen scheinen.

Nimmt man an, für $r = r_1$ sei $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, so wird

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -r^2 w \sin\beta + r_1{}^2 (\omega + w \sin\beta).$$

Setzt man nun $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -w \sin\beta,$$

so wird

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{r_1{}^2}{r^2} (\omega + w \sin\beta).$$

Diese letzte Gleichung gibt die elliptische Bewegung des conischen Pendels, bei der die grosse Axe immer dieselbe bleibt, wenn die Schwingungsweite unendlich klein ist. Die Ebene aber, in der diese grosse Axe liegt, geht mit der Geschwindigkeit $w \sin\beta$ der Drehung der Erde entgegen gleichförmig fort. Ist die Schwingungsweite des Pendels nicht unendlich klein, so schreitet die grosse Axe der Bahn nach der Seite, nach der ω geht, fort, und dieses Fortschreiten wird sich daher bei einem conisch schwingenden Pendel mit der Drehung der Schwingungsebene $w \sin\beta$ combiniren, und so diese Drehung schneller oder langsamer erscheinen lassen, je

nachdem ω der Drehung der Erde entgegen, oder mit dieser gleich gerichtet ist.

145. Aus der Translation der Erde um die Sonne ergibt sich eine weitere Führungskraft, welche bei den an der Erdoberfläche stattfindenden Bewegungen nach entgegengesetzter Richtung anzubringen ist, um die Bewegungen relativ gegen mit der Erde fest verbundene Axen zu erhalten. Setzt man statt der wenig excentrischen Bahn, welche die Erde um die Sonne durchläuft, einen Kreis vom Halbmesser a, nennt man w_1 die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher diess geschieht, so hat man die Beschleunigung des Erdmittelpunktes in der Richtung von a gleich

$$- a w_1{}^2$$

und zu den entgegengesetzten Führungskräften hat man daher noch für die Masse m die

$$m a w_1{}^2$$

zuzusetzen.

Beachtet man diese Grösse, so hat man auch die Anziehungskraft der Sonne auf diese Masse m zu beachten, und diese wird, wenn a′ die Entfernung der Masse von der Sonne ist, nach dem Gravitationsgesetze

$$f \frac{S m}{a'^2},$$

wo f eine für alle gravitirenden Massen constante Grösse ist, S die Masse der Sonne. Ist noch T die Masse der Erde, so hat man

$$f \frac{S T}{a^2} = T a w_1{}^2,$$

woraus

$$f S = a^3 w_1{}^2$$

und also die Anziehung der Sonne auf die Masse m

$$\frac{m a^3 w_1{}^2}{a'^2}.$$

Wegen der Translation um die Sonne und wegen der Anziehung der Sonne hat man daher die Kräfte

$$m a w_1{}^2 \text{ und } \frac{m a^3 w_1{}^2}{a'^2}$$

zu den übrigen bewegenden und Führungskräften zuzusetzen; die

erste liegt in der Verlängerung von a, die letzte dem a' entgegen. Vernachlässigt man den sehr kleinen Winkel a a', so bleibt in der Verlängerung von a die Kraft

$$m w_1{}^2 a\left(1 - \frac{a^2}{a'^2}\right).$$

Diese Kraft wird Null für $a = a'$, was der Fall ist, wenn für den Ort der Masse m die Sonne im Horizonte steht; bei Tage ist $a' < a$ und also die Kraft in der Richtung gegen die Sonne liegend, Nachts dagegen von dieser abgewendet. Man sieht aber, dass diese Kraft immer nur sehr unbedeutend ist, theils wegen des Factors $w_1{}^2$, theils weil a und a' immer sehr nahe gleich sind. In der Ebbe und Fluth hat man übrigens gleich wohl eine sehr merkliche Wirkung dieser Kraft, wobei aber die hier nicht beachtete Anziehungskraft des Mondes bedeutender hervortritt, als die der Sonne.

Drehung eines starren Körpers um eine Axe. Gleichgewicht der Kräfte hierbei.

146. Zwei Kräfte, welche gleich gross aber entgegengesetzt sind, deren Richtungen in eine gerade Linie fallen, und welche beide an demselben starren Körper wirken, bringen an diesem keine Bewegung hervor.

147. Daraus folgt, dass eine Kraft P, welche auf einen starren Körper wirkt, in jedem Punkte ihrer Richtungslinie, welcher mit dem Angriffspunkte der Kraft starr verbunden ist, angebracht werden kann, ohne die stattfindende Bewegung oder die Ruhe des Körpers zu stören. Ist A der Angriffspunkt der Kraft P und B ein zweiter mit dem ersten starr verbundener Punkt des Körpers, welcher in der Richtungslinie von P liegt; bringt man in diesem zwei gleich grosse Kräfte P_1 und P_2 nach entgegengesetzten Richtungen, aber beide in der Richtungslinie von P an, so heben sich diese gegenseitig auf, und die Bewegung wird durch diese beiden Kräfte P_1 und P_2 nicht gestört. Liegt von diesen P_1 in der Richtung von P und P_2 dem entgegen, so sind auch P und P_2 im Gleichgewichte; auch diese beiden Kräfte stören zusammen die Bewegung nicht, und

können daher auch weggelassen werden. Dann bleibt aber nur noch P_1 am Punkte B übrig, und dieses hat daher denselben Einfluss auf die Bewegung wie P in A; wodurch der obige Satz bewiesen ist.

148. Sind zwei Punkte des starren Körpers A und B unbeweglich festgehalten, so dass dieser sich nur um die Axe AB drehen kann, so bringt eine Kraft, welche der Drehaxe AB parallel geht, keine Drehung hervor und ändert ebensowenig eine bestehende Drehung ab.

Man darf also ohne die Bewegung oder die Ruhe des Körpers zu stören, zu den vorhandenen Kräften eine der Drehaxe parallele Kraft zusetzen, oder wenn eine solche vorhanden ist, diese weglassen.

149. Hierdurch hat man das Mittel, die Angriffspunkte aller Kräfte, welche an einem um eine unbewegliche Axe drehbaren starren Körper wirken, in eine Ebene zu verlegen, die rechtwinklich auf der Drehaxe steht. Sind nämlich die Kräfte schief gegen die Axe gerichtet, so schneidet jede eine solche Ebene, und man kann die Kräfte in diesen Schnittpunkten anbringen, wenn nur diese Ebene normal zur Drehaxe mit dem starren Körper starr verbunden gedacht wird. Liegen dagegen mehrere Kräfte in parallelen zur Drehaxe rechtwinklichen Ebenen, so kann man zu jeder von ihnen eine sie schneidende und zur Drehaxe parallele Kraft zusetzen, ohne dadurch die Bewegung abzuändern. Setzt man diese Kraft mit der von ihr geschnittenen zusammen, so wird die Resultirende schief gegen die Axe stehen, und damit ihr Angriffspunkt in eine beliebige, zur Drehaxe normale Ebene verlegt werden können. Zerlegt man dann wieder alle Kräfte in solche, die zur Drehaxe parallel gehen und in rechtwinkliche darauf, so haben die ersten keinen Einfluss auf Drehung und können daher weggelassen werden. Dann hat man es nur noch mit Kräften zu thun, welche alle in einer zur Drehaxe rechtwinklichen Ebene liegen.

150. Ich betrachte zuerst zwei solche Kräfte P und Q in einer Ebene rechtwinklich zur Drehaxe, welche sich scheiden. Denkt man den Schnittpunkt fest mit der Drehaxe verbunden, so kann

man die Kräfte in diesem Punkte anbringen und dann nach Nro. 21 zu einer Resultirenden zusammensetzen. Geht diese durch die Drehaxe, so bringen die beiden Kräfte keine Umdrehung hervor, oder ändern diese nicht ab, sondern drücken nur die Axe in ihre Lager. Diese Kräfte sind an diesem Körper im Gleichgewichte. Geht dagegen die Resultirende nicht durch die Drehaxe, so wird sie Drehung hervorbringen oder die bestehende Drehung abändern.

Sind α und β die Winkel, welche die Resultirende R mit den beiden Kräften P und Q bildet, so hat man aus dem Kräfteparallelogramm

$$P \sin\alpha = Q \sin\beta.$$

Geht die Resultirende durch die Drehaxe und sind p und q die Entfernungen der Richtungslinien der Kräfte von der Drehaxe, so hat man

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und also

$$Pp = Qq$$

als die Bedingung des Gleichgewichtes.

Man nennt die Entfernung der Richtung einer Kraft von einer Drehaxe den Hebelarm der Kraft, und nennt das Product aus einer Kraft in ihren Hebelarm das statische Moment oder auch das Drehmoment der Kraft für diese Axe.

Die obige Bedingung des Gleichgewichtes lässt sich damit so aussprechen: Kräfte sind an einem Körper, der eine feste Axe hat, im Gleichgewichte, wenn sie um diese Axe nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben, und ihre statischen Momente gleich gross sind.

151. Nimmt man das Drehmoment positiv oder negativ, je nachdem die Kraft um die Drehaxe nach der einen oder nach der andern Seite zu drehen sucht, so kann man den letzten Satz auch so aussprechen: Kräfte sind an einem Körper, der eine feste Axe hat, im Gleichgewichte, wenn die Summe ihrer statischen Momente für diese Axe gleich Null ist.

152. Das statische Moment der Resultirenden zweier Kräfte P und R ist gleich der Summe der statischen Momente der beiden Kräfte.

Verbindet man den Schnittpunkt der Kräfte mit dem Fusspunkte der Drehaxe, nennt man α, β, γ die Winkel, welchen diese Verbindungslinie mit den Kräften Q, P, R bildet, so hat man

$$R = Q\cos(\gamma - \alpha) + P\cos(\beta - \gamma)$$
$$0 = Q\sin(\gamma - \alpha) - P\sin(\beta - \gamma).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin\gamma$, und die zweite mit $\cos\gamma$ und zieht die zweite von der ersten ab, so erhält man

$$R\sin\gamma = Q\sin\alpha + P\sin\beta.$$

Sind nun r, q, p

die Hebelarme der Kräfte, so hat man

$$r = \partial\sin\gamma;\ q = \partial\sin\alpha;\ p = \partial\sin\beta,$$

wo ∂ der Abstand des Schnittpunktes der Kräfte von der Axe ist. Damit geht obige Gleichung über in

$$Rr = Qq + Pp, \tag{27}$$

welches eben den obigen Satz enthält.

153. Die Winkel α, β, γ wird man hierbei von der Linie ∂ weg nach einer willkührlich gewählten Seite hin messen. Die Drehung einer Kraft, z. B. von Q, geht dann nach derselben Seite hin, so lange α zwischen 0 und π liegt; für π geht Q durch die Drehaxe, ihr Moment wird Null, weil ihr Hebelarm 0 wird. Wird dagegen $\alpha > \pi$, so wird oben $Q\sin\alpha$ negativ, und man hat daher jetzt das Moment Qq negativ zu nehmen. Diese Kraft Q dreht nach der andern Seite der Drehaxe als die oben positiv angenommenen Momente. Daher die schon oben ausgesprochene Regel allgemein: Drehmomente haben gleiche Zeichen, wenn ihre Drehungsrichtungen dieselben sind; sind diese entgegengesetzt, so haben die Drehmomente verschiedene Zeichen.

154. Mit Hilfe des obigen Satzes lassen sich zwei Kräfte durch eine ersetzen: fährt man bei mehreren Kräften so fort, dass man immer zu der Resultirenden noch eine weitere Kraft nimmt, so erhält man das statische Moment der Resultirenden gleich der Summe der Drehmomente aller einzelnen Kräfte, diese mit der gehörigen Berücksichtigung ihrer Zeichen genommen.

Ist die Summe aller statischen Momente gleich Null, so sind entweder die Kräfte selbst im Gleichgewichte, oder die Resultirende hat den Hebelarm Null, sie geht durch die Drehaxe; in beiden Fällen bringen die Kräfte keine Drehung hervor. **Kräfte sind also an einem Körper mit einer festen Axe im Gleichgewichte, wenn die Summe ihrer Drehmomente für diese gleich Null ist.**

155. Einer besondern Betrachtung müssen noch parallele Kräfte unterworfen werden; ich setze bei ihnen voraus, sie seien alle, wie diess oben angegeben ist mit ihren Angriffspuncten in eine zur Axe rechtwinkliche Ebene gebracht, und dort parallel zur Axe und nach dieser Ebene zerlegt; nur die letzten Componenten haben Einfluss auf Drehung und es sollen desshalb auch nur diese Componenten betrachtet werden.

Man kann hierzu unmittelbar von den in (Nro. 152) gebrauchten Bezeichnungen und den dortigen Gleichungen ausgehen, wenn man $\beta = \alpha$ werden lässt; es wird

$$R = Q\cos(\gamma - \alpha) + P\cos(\alpha - \gamma)$$
$$0 = Q\sin(\gamma - \alpha) - P\sin(\alpha - \gamma),$$

woraus man $\qquad R = (Q + P)\cos(\gamma - \alpha)$

und aus der zweiten Gleichung

$$0 = (Q + P)\sin(\gamma - \alpha), \text{ oder } \sin(\gamma - \alpha) = 0, \text{ also}$$
$$\gamma = \alpha \text{ und } R = P + Q$$

erhält.

Die Resultirende ist daher hier der Summe der beiden Componenten gleich und geht mit ihnen parallel; ihre Lage findet man aus dem Satze, dass ihr Drehvermögen, ihr statisches Moment in Beziehung zu einer beliebigen, auf der Ebene der Kräfte rechtwinklichen Axe die Summe der statischen Momente der Componenten sein muss.

156. Ist P parallel mit Q, aber diesem entgegengesetzt, so hat man in den Formeln (Nro. 152) $\beta = \pi + \alpha$ zu setzen, wodurch diese werden:

$$R = Q\cos(\gamma - \alpha) + P\cos(\pi + \alpha - \gamma) = (Q - P)\cos(\gamma - \alpha),$$

und

$$0 = Q \sin(\gamma - \alpha) + P \sin(\alpha - \gamma) = (Q - P) \sin(\gamma - \alpha),$$

woraus

$$\sin(\gamma - \alpha) = 0 \text{ und } \cos(\gamma - \alpha) = \pm 1 \text{ folgt.}$$

Da R positiv sein muss, so hat man von den beiden letzten Zeichen das obere zu wählen, oder $\gamma = \alpha$ zu setzen, wenn

$$Q > P;$$

ist dagegen $Q < P$,

so muss $\cos(\gamma - \alpha) = -1$ genommen werden, also

$$\gamma = \pi + \alpha.$$

Die Resultirende ist daher den beiden Kräften parallel, und hat die Richtung der grösseren Kraft und ist der Differenz der Kräfte gleich.

Um diesen Fall mit dem vorhergehenden zusammenfassen zu können, nimmt man bei parallelen Kräften, die mit entgegengesetzter Richtung mit entgegengesetzten Zeichen, und hat dann die Resultirende gleich der algebraischen Summe der Componenten; sie liegt in der Richtung der positiven Kräfte, wenn diese Summe positiv wird, andernfalls in der Richtung der als negativ bezeichneten Componenten.

157. Man sieht leicht, dass man diese Sätze auf beliebig viele parallele Kräfte ausdehnen darf, wenn man zuerst zwei zusammensetzt, die Resultirende dieser mit der dritten u. s. f.

158. Sind zwei parallele gleich grosse, aber entgegengesetzte Kräfte vorhanden, so erhält man das Moment derselben gleich dem Producte aus einer der Kräfte in ihre gegenseitige Entfernung. Die Resultirende wird nach der obigen Formel gleich Null. Eine solche Verbindung von zwei gleichen parallelen, aber entgegengesetzten Kräften gibt daher zwar Veranlassung zu einer Drehung; sie lässt sich aber nicht durch eine Resultirende ersetzen. Man nennt zwei gleiche parallele und entgegengesetzte Kräfte, welche an einem festen Körper wirken ein Kräftepaar, ein Gegenpaar von Kräften. Das statische Moment desselben, sein Drehvermögen ist unabhängig von seiner Lage gegen die Drehaxe; man kann daher ein Kräftepaar in einer Ebene durch jedes andere ersetzen, für welches das

Product aus der einen Kraft in die Entfernung beider Kräfte dieselbe Zahl gibt, wie bei dem ersten.

159. Für eine Kraft P, welche mit der Axe z den Winkel P, z bildet, hat die Componente parallel der Axe

$$P \cos (P, z)$$

kein Drehvermögen. Das ganze Drehvermögen von P ist daher das der zweiten Componenten von P

$$P \sin (P, z).$$

Den Hebelarm dieser letzten Kraft findet man, wenn man durch P eine Ebene parallel zu z legt, in welcher die beiden oben bezeichneten Componenten liegen, und die Entfernung der Axe z von dieser Ebene nimmt; sie sei ∂. Das Drehvermögen der Kraft P um die Axe z ist damit

$$P \partial \sin P, z$$

und diess nennt man desshalb auch das statische Moment der Kraft P für die Axe z.

Man sieht, dass es ganz gleichgültig bei der Bestimmung dieses statischen Momentes ist, wo man den Angriffspunkt von P in seiner Richtungslinie nimmt. ∂ ist, wie man sieht, der kürzeste Abstand der beiden Linien P und z.

Damit lässt sich nun der Satz in (Nro. 154) so aussprechen: Kräfte an einem starren Körper mit einer festen Axe sind im Gleichgewichte, wenn die Summe ihrer statischen Momente für diese Axe gleich Null ist.

Drehung eines starren Körpers um eine feste Axe, Dynamik.

160. Bei der Bewegung mehrerer vereinigten Massen, die so verbunden sind, dass die Bewegung der einen Masse die Bewegung der andern bedingt, wie diess z. B. bei den Massen, welche zu einem festen Körper vereinigt sind, der Fall ist, wird die Bewegung jeder einzelnen Masse nicht mehr die sein, welche diese Masse unter dem Einflusse der auf sie wirkenden äusseren Kraft, wie z. B. der Schwerkraft, annimmt; es wird vielmehr diese Masse

die andere mitnehmen müssen, oder von diesen mitgenommen werden, und so ihre Bewegung eine andere werden. Dieses Mitnehmen wird aber nur dadurch möglich sein, dass Drücke zwischen den einzelnen Massen stattfinden. Die Drücke müssen paarweise und direct einander entgegen zwischen zwei Massentheilen m und m_1 des Körpers stattfinden, da ohne das die vereinigten Massen m und m_1 selbst ein Bestreben hätten, nach einer bestimmten Richtung fortzugehen, ohne dass eine äussere Kraft auf sie einwirkte, was dem Begriffe der Trägheit widerspricht.

Ist wie hier die Vereinigung der Massen ein fester Körper, welcher sich um eine feste Axe dreht, so können in den Punkten, in welchen die Axe festgehalten ist, von den Lagern ebenfalls Drücke auf den Körper ausgehen, welche von dem Körper in gleicher Stärke, aber entgegengesetzter Richtung, auf die Lager zurückgegeben werden.

161. Nennt man die Drehaxe die Axe der z; zieht man rechtwinklich auf diese zwei Axen, die der x und der y, welche man an der Drehung des Körpers Theil nehmen lässt, so dass diese Axen immer durch dieselben Punkte des Körpers gehen, so wird jeder Punkt des Körpers in Beziehung auf diese drei Axen in relativer Ruhe sein.

Betrachtet man ein Element dm der Masse des Körpers, welches in der Entfernung r von der Drehaxe liegt; ist ω zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, also auch des Axensystems, welche von x nach y gehen soll; ist $f_x dm$ die etwa vorhandene äussere Kraft, welche das Element dm angreift, zerlegt nach x; ist ebenso $h_x dm$ die Componente der Drücke, welche auf das Element dm von den umgebenden Massentheilen ausgeübt werden, zerlegt nach x; so ist die Bedingung der relativen Ruhe nach Nro. 138

$$\begin{aligned} f_x dm + h_x dm + r\omega^2 \cos(r,x)\, dm - r\frac{d\omega}{dt}\cos(n,x)\, dm = 0 \\ f_y dm + h_y dm + r\omega^2 \cos(r,y)\, dm - r\frac{d\omega}{dt}\cos(n,y)\, dm = 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

Bildet man diese Gleichungen für alle Elemente des Körpers und addirt alle die Gleichungen, welche die Componenten nach x

enthalten, und ebenso die, welche die Componenten nach y enthalten, so erhält man in den ersten Gliedern die Summen der Componenten aller äusseren Kräfte in den Richtungen x und y. Diese mögen durch P_x und P_y vorgestellt sein.

Die Glieder h_x d m heben sich gegenseitig auf, da jeder Druck doppelt, nach entgegengesetzten Seiten vorkommt. Nur an den Lagern hat man in diese Summe die Drücke auf den festen Körper zu nehmen, nicht aber die entgegengesetzten, welche auf die Lager ausgeübt werden, also auf Massentheile, die dem festen Körper nicht mehr angehören. Bezeichnet man die Componenten der Drücke in den Lagern auf den starren Körper mit X und Y nach den Richtungen von x und von y, so reduciren sich die Summen aller h_x d m und aller h_y d m auf X und Y.

In den Gliedern $r\omega^2 \cos(r,x)\,dm$ lässt sich ω^2 als Factor aus der Summe heraussetzen; schreibt man dann noch $r\cos(r,x) = x$, der Coordinate der Masse d m, so hat man die Summe dieser Glieder

$$\Sigma r\,\omega^2 \cos(r,x)\,dm = \omega^2 \Sigma x\,dm = m x_0\,\omega^2,$$

wo x_0 die Coordinate des Schwerpunktes des Körpers ist. Bedenkt man, dass

$$r\cos(n,x) = -y$$

ist, und dass $\frac{d\omega}{dt}$ constant für die zu nehmende Summe ist, so erhält man ebenso

$$\Sigma r \frac{d\omega}{dt} \cos(n,x)\,dm = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma y\,dm = -m y_0 \frac{d\omega}{dt}.$$

Damit werden die beiden obigen Bedingungen des relativen Gleichgewichtes

$$P_x + X + m x_0\,\omega^2 + m y_0 \frac{d\omega}{dt},$$

$$P_y + Y + m y_0\,\omega^2 - m x_0 \frac{d\omega}{dt}.$$

Bei der Willkührlichkeit der Axen x und y kann man die erste in der Ebene durch z und durch den Schwerpunkt des Körpers nehmen, womit $y_0 = 0$ wird, und wenn man dann x_0 mit ∂ bezeichnet

$$X = -P_x - m\partial\omega^2,$$

$$Y = -P_y + m\,\partial \frac{d\omega}{dt}. \qquad (28)$$

Eine weitere Gleichung, welche die Bewegung selbst kennen lehrt, erhält man in folgender Weise: Schreibt man die Gleichungen (a) wie folgt

$$f_x dm + h_y dm + x\omega^2 dm + y\frac{d\omega}{dt}dm = 0,$$
$$f_y dm + h_y dm + y\omega^2 dm - x\frac{d\omega}{dt}dm = 0, \qquad (b)$$

so kann man ω^2 eliminiren, indem man die erste dieser Gleichungen mit y und die zweite mit x multiplicirt und beide subtrahirt. Man erhält auf diese Weise

$$(f_x y - f_y x)dm + (h_x y - h_y x)dm + r^2\frac{d\omega}{dt}dm = 0.$$

Die beiden ersten Glieder dieser Gleichung sind das negative statische Moment der an dem Elemente dm thätigen äusseren und inneren Kräfte, das letzte Glied ist die Masse multiplicirt mit der Winkelbeschleunigung; diese Gleichung ist die in Nro. 72. 13 aufgestellte.

Bildet man diese Gleichung für jedes der Massenelemente des Körpers, und addirt alle diese Gleichungen, so erhält man im ersten Gliede die Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte, negativ, wenn man die Drehung von x nach y als die positive annimmt. Diese Summe sei — M.

Die Summe der zweiten Glieder wird Null; es entspricht nämlich jedem Druck h dm an einem Elemente dm stets ein gleicher und entgegengesetzter h dm an einem zweiten Elemente; da diese beiden in eine gerade Linie fallen, so hat man die statischen Momente derselben gleich gross aber entgegengesetzt; ihre Summe ist daher paarweise gleich Null.

Die Drücke, welche von den Lagern herrühren, haben keine solche Gegendrücke an dem Körper selbst; aber auch ihre statischen Momente verschwinden, da sie auf die Drehaxe selbst wirken.

Die Summe der letzten Glieder wird

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm,$$

wobei das Integral über alle Massentheile des Körpers auszudehnen ist. Dieses Integral, welches von der geometrischen Vertheilung der Massen um die Drehaxe abhängt, nennt man das **Trägheitsmoment** des Körpers. Wir bezeichnen dieses Trägheitsmoment

$$\int r^2 dm \text{ mit } Q .$$

Damit wird obige Gleichung

$$Q \frac{d\omega}{dt} = M. \qquad (29)$$

Das Trägheitsmoment multiplicirt mit der Winkelbeschleunigung ist gleich dem statischen Momente der äusseren Kräfte.

Für das Gleichgewicht muss die Beschleunigung Null sein, was wieder die Bedingung gibt

$$M = 0.$$

162. Die Bestimmung des Trägheitsmomentes ist eine Aufgabe, welche für regelmässig gestaltete homogene Körper, oder für solche, deren Dichte sich gesetzmässig von einer Stelle zur andern ändert, die Integralrechnung löst.

Man findet für ein homogenes rechtwinkliches Parallelepiped, dessen Kanten a, b, c sind, für eine Drehaxe, welche durch den Schwerpunkt des Parallelepipeds parallel zur Kante a geht, das Trägheitsmoment

$$Q = \frac{1}{12} \Delta abc (b^2 + c^2),$$

wobei Δ die Dichte des Parallelepipeds ist, oder Δabc die Masse m desselben, womit

$$Q = \frac{1}{12} (b^2 + c^2) m .$$

Für einen homogenen geraden Cylinder vom Halbmesser r und der Länge l findet man, für die Axe der Figur als Drehaxe

$$Q = \tfrac{1}{2} \Delta \pi l r^4 = \tfrac{1}{2} m r^2 .$$

Geht die Drehaxe durch den Schwerpunkt des Cylinders rechtwinklich auf die Drehaxe, so wird das Trägheitsmoment des Cylinders

$$Q = \frac{1}{12} \Delta r^2 l \pi (3 r^2 + l^2) = \frac{1}{12} m (3 r^2 + l^2).$$

Für eine homogene Kugel erhält man das Trägheitsmoment für einen Durchmesser

$$Q = \frac{8}{15} \Delta r^5 \pi = \frac{2}{5} m r^2 .$$

163. Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so findet man leicht damit das Trägheitsmoment für jede zur ersten parallele Axe.

Legt man die Coordinatenaxen der x, y, z so, dass x die Axe durch den Schwerpunkt ist, für welche man das Trägheitsmoment bereits kennt, dass z durch den Schwerpunkt des Körpers geht und die beiden parallelen Axen schneidet, endlich y auf beiden rechtwinklich steht; nennt man noch ∂ die Entfernung des Schwerpunktes von der neuen Drehaxe, so hat man das Quadrat der Entfernung eines Elementes dm des Körpers von der Drehaxe

$$(z + \partial)^2 + y^2$$

und daher das Trägheitsmoment für die neue Drehaxe

$$Q = \int[(z + \partial)^2 + y^2]\,dm$$

$$= \int(z^2 + y^2)\,dm + 2\partial\int z\,dm + \partial^2\int dm.$$

Das erste Integral ist das Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe x, welches bekannt ist und Q_s heissen soll. Das zweite Integral ist Null, weil die x, y Ebene durch den Schwerpunkt geht; das dritte Integral endlich ist die ganze Masse des Körpers, welche m sein soll. Damit wird obige Gleichung

$$Q = Q_s + m\partial^2.$$

Das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe ist gleich dem Trägheitsmomente desselben Körpers für eine durch den Schwerpunkt des Körpers zur ersten parallel gelegten Axe mehr dem Producte aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung beider Axen.

Das Trägheitsmoment eines rechtwinklichen Parallelepipeds mit den Kanten a, b, c ist hiernach bei der Masse m für die Kante a

$$\frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m\frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2).$$

Das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders für eine Seite des Cylinders ist

$$\frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Das Trägheitsmoment einer Kugel von der Masse m und dem Halbmesser r für eine Axe, welche in der Entfernung ∂ von dem Mittelpunkte wegliegt, ist

$$\frac{2}{5} m r^2 + m \partial^2 = m\left(\frac{2}{5} r^2 + \partial^2\right).$$

Weitere Untersuchungen über die Trägheitsmomente enthält der folgende Abschnitt.

Die lebendige Kraft.

164. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers zur Zeit t, so hat ein Massenelement dm des Körpers, das in der Entfernung r von der Drehaxe liegt, die Geschwindigkeit

$$r\omega,$$

und seine lebendige Kraft ist daher

$$\tfrac{1}{2} dm . r^2 \omega^2.$$

Die Summe der lebendigen Kräfte aller Massentheile des Körpers ist

$$\tfrac{1}{2}\int r^2 \omega^2 dm = \tfrac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm = \tfrac{1}{2} Q \omega^2,$$

wobei das Integral über die ganze Masse des Körpers auszudehnen ist. Diese Summe der lebendigen Kräfte aller Massentheile des Körpers nennt man die lebendige Kraft des Körpers; sie ist gleich dem halben Trägheitsmomente des Körpers multiplicirt mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit.

Die Arbeit der bewegenden Kräfte.

165. Dreht sich der Körper um $d\varphi$, so ist $r d\varphi$ der Weg des Elementes dm, an welchem die Kräfte $f_x dm$, $f_y dm$, $f_z dm$ wirken (Nro. 161). Projicirt man den Weg des Angriffspunktes auf die Richtungen der Kräfte, so erhält man die Wege dieser Kräfte gleich

$$r d\varphi \cos(n,x); \quad r d\varphi \cos(n,y); \quad r d\varphi \cos(n,z),$$

oder $\quad -d\varphi . y; \quad +d\varphi . x; \quad 0$

und damit die Arbeit der an dm thätigen äusseren Kraft

$$d\varphi (x f_y - y f_x) dm,$$

oder $d\varphi$ multiplicirt mit dem statischen Momente der an dm thätigen Kraft.

Berechnet man in gleicher Weise die Arbeiten aller an den Massentheilen des Körpers thätigen äusseren Kräfte, und addirt diese alle, so erhält man die Summe der Arbeiten aller äusseren Kräfte für die Drehung $d\varphi$ des Körpers gleich

$$M\,d\varphi,$$

gleich dem statischen Momente aller dieser Kräfte multiplicirt mit der unendlich kleinen Drehung $d\varphi$.

I t diese Arbeit gleich Null, so ist das statische Moment aller Kräfte gleich Null, und diese sind also im Gleichgewichte.

Der Satz von der Arbeit der bewegenden Kräfte.

166. Setzt man den Winkel, welchen eine durch die Drehaxe gehende, mit dem Körper starr verbundene Ebene mit einer zweiten Ebene, welche ebenfalls durch die Drehaxe geht, aber unbeweglich ist, zur Zeit t bildet, gleich φ, so ist die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t in der Richtung, in welcher φ gemessen ist, gleich

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

und damit die Gleichung (29) in (Nro. 161)

$$Q\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{d\varphi}{dt}$, und integrirt dann nach t, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\tfrac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2=\int_0^{\varphi}M\,d\varphi, \qquad (30)$$

welche Gleichung sich mit den eingeführten Bezeichnungen so aussprechen lässt: Die Zunahme der lebendigen Kraft des sich drehenden Körpers ist gleich der Summe der Elementararbeiten oder der Arbeit der äusseren Kräfte während dieser Drehung.

Drehung eines schweren Körpers um eine horizontale Axe.

167. Ist ∂ die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, und φ der Winkel, welchen die Richtung ∂ zur Zeit t mit der Verticalen bildet, so ist die Lage des Körpers und folglich seine Bewegung gekannt, wenn man φ als Function von t angeben kann.

Nennt man m die Masse des Körpers, so ist mg die bewegende Kraft und $-mg\partial\sin\varphi$ das statische Moment derselben für die Drehaxe, die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ und damit die Gleichung (29 in Nro. 161)

$$Q\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\partial\sin\varphi, \tag{a}$$

oder wenn man $$Q = m(k^2 + \partial^2)$$

setzt, wo also mk^2 das Trägheitsmoment für die zur Drehaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt ist

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g\partial}{k^2+\partial^2}\sin\varphi.$$

Für einen einzelnen schweren Punkt, welcher gezwungen ist, in einer Verticalebene einen Kreis vom Halbmesser l zu durchlaufen, oder für ein einfaches Pendel von der Länge l hat man in Nro. 97 die Bewegungsgleichung (a)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

gefunden. Der betrachtete schwere Körper bewegt sich daher wie ein einfaches Pendel von der Länge l, für welches

$$l = \frac{k^2+\partial^2}{\partial} \tag{b}$$

ist.

Für unendlich kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage hat man hiermit die Schwingungsdauer

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2+\partial^2}{\partial g}}. \tag{c}$$

Die Punkte in der Entfernung l von der Drehaxe bewegen sich,

wie einzelne Punkte, welche mit der Drehaxe verbunden sind; die darüber liegenden würden für sich allein schneller schwingen, die unteren langsamer; die ersten werden daher durch die Verbindung mit den andern verzögert, die letztern beschleunigt.

Der Satz über die Arbeit gibt

$$\tfrac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \tfrac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mg\partial(1 - \cos\varphi),$$

wenn $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ die Winkelgeschwindigkeit ist, wenn der Schwerpunkt vertical unter der Drehaxe liegt. $\partial(1 - \cos\varphi)$ ist dann die Hebung des Schwerpunktes von dieser Lage weg bis dahin, wo die Linie ∂ den Winkel φ mit der verticalen bildet.

Ist die Geschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ nicht zu gross, so kommt der Körper bei dem Winkel φ_1, für welchen

$$\tfrac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = mg\partial(1 - \cos\varphi_1)$$

ist, momentan zur Ruhe, und kehrt dann zurück, um nach der andern Seite der Verticalen durch die Drehaxe zu schwingen.

Setzt man

$$2\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1{}^2 \text{ für } 1 - \cos\varphi_1$$

so wird obige Gleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1 \sqrt{\frac{mg\partial}{Q}} = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1 \sqrt{\frac{g\partial}{k^2+\partial^2}}, \qquad \text{(d)}$$

welche man gebraucht, um aus dem Ausschlag φ_1 die Geschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ zu berechnen.

168. Die Gleichung (b) der vorhergehenden Nummer zeigt, dass sich ein Körper um alle Axen, welche unter sich parallel sind, und welche von dem Schwerpunkte gleich weit abstehen, in gleicher Weise dreht, namentlich also gleiche Schwingungsdauer für alle diese Axen hat.

Beschreibt man um den Schwerpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser

$\frac{k^2}{\partial}$, rechtwinklich auf die Drehaxe und

bringt im Umfange dieses Kreises eine Axe an, welche der gegebenen Drehaxe parallel ist, so wird der Körper um diese neue Axe sich drehen, wie ein einfaches Pendel von der Länge

$$\frac{k^2 + \left(\frac{k^2}{\partial}\right)^2}{\frac{k^2}{\partial}} = \partial + \frac{k^2}{\partial} = \frac{k^2 + \partial^2}{\partial} = 1,$$

das heisst, wie der Körper bei der früheren Aufhängung.

Trägt man von der ersten Drehaxe in der durch den Schwerpunkt gehenden Rechtwinklichen auf die Drehaxe die Länge l auf, und bringt dort eine zweite Drehaxe, der ersten parallel an, so sind die Entfernungen des Schwerpunktes von diesen Drehaxen

$$\partial \text{ und } \frac{k^2}{\partial}$$

und der Körper wird daher um beide Axen Schwingungen von gleicher Dauer machen; die Länge des entsprechenden einfachen Pendels ist die Entfernung dieser beiden Axen. Darauf beruht das von Bohnenberger angegebene Reversionspendel. Der Durchschnitt dieser zweiten Axe mit der Ebene durch den Schwerpunkt normal zur Drehaxe heisst der Schwingungsmittelpunkt.

169. Die Summe der Drücke, welche der sich drehende Körper in den beiden festgehaltenen Punkten der Axe in der Richtung parallel ∂ erleidet, ergeben sich aus Gleichung (28 Nro. 161)

$$X = -mg\cos\varphi - m\partial\omega^2 = \tag{e}$$

$$= -m\partial\left(\omega_0{}^2 - \frac{2g\partial}{k^2+\partial^2}\right) - mg\cos\varphi\,\frac{k^2+3\partial^2}{k^2+\partial^2},$$

und die Summe der Drücke rechtwinklich darauf

$$Y = +mg\sin\varphi + m\partial\frac{d\omega}{dt} = \tag{f}$$

$$= mg\sin\varphi\left(1 - \frac{\partial^2}{k^2+\partial^2}\right).$$

Die Drücke, welche das Lager erleidet, sind diesen gleich, aber entgegengesetzt.

Liegt der Schwerpunkt vertical unter der Drehaxe, so ist $\varphi = 0$ und der Druck vertical abwärts auf das Lager

$$mg + m\partial\omega^2 = mg + m\partial\omega_0{}^2,$$

der Druck horizontal in der Richtung der Bewegung

$$-m\partial\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Liegt dagegen der Schwerpunkt vertical über der Drehaxe, so ist $\varphi = \pi$ und der Druck auf das Lager vertical aufwärts

$$-mg + m\partial\omega^2 = -mg\left(1 + 4\frac{\partial^2}{k^2 + \partial^2}\right) + m\partial\omega_0{}^2.$$

Der horizontale Druck ist hier wieder gleich Null.

Liegt der Schwerpunkt in der Drehaxe, so sind die Drücke auf die Lager unabhängig von der Bewegung, und geben die Resultirende mg, das Gewicht des Körpers.

170. Wirkt auf den betrachteten Körper während einer sehr kurzen Zeit eine Kraft N, von welcher wir voraussetzen, dass sie in einer Ebene liege, welche rechtwinklich auf die Drehaxe geht, so wird die Gleichung (a) in (Nro. 167)

$$Q\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\partial\sin\varphi + Nn$$

wo n der Hebelarm der Kraft N ist.

Integrirt man hier von $t = 0$ bis t, so erhält man, wenn man ω für die Winkelgeschwindigkeit setzt

$$Q\omega - Q\omega_0 = -mg\partial\int_0^t \sin\varphi\, dt + \int_0^t Nn\, dt.$$

Ist der Angriff der Kraft N nach einer unmessbar kleinen Zeit vorbei, so kann die während dieser Zeit erfolgte Aenderung von φ ebenfalls nur unmessbar klein sein, während doch, wenn N sehr gross ist, die Aenderung der Geschwindigkeit eine messbare sein kann. Die Wirkung einer solchen Kraft, welche in unmessbar kleiner Zeit eine messbare Aenderung in der Geschwindigkeit hervorbringt, nennt man einen Stoss.

Ist t unmessbar klein, so muss auch $\int_0^t \sin\varphi\, dt$, was kleiner

als t ist, unmessbar klein sein, und kann daher weggelassen werden; ebenso wird n sich während der Zeit t nur unmerklich ändern, und desshalb als constant behandelt werden können. Damit wird die zweite Gleichung

$$Q\omega - Q\omega_0 = n\int_0^t N\,dt. \tag{g}$$

welche überhaupt für den Stoss gilt, da die bewegende Kraft mg hier nicht mehr in Betracht kommt.

Wirkt nach der Zeit t nur noch die Schwerkraft auf den Körper, so wird von hier an die Bewegung nach der Formel (a) in (Nro. 167) sich berechnen lassen. Geht man hierbei davon aus, dass die Geschwindigkeit beim Anfange des Stosses Null war, so ist $\omega_0 = 0$ und

$$Q\omega = n\int_0^t N\,dt;$$

ist ferner zu dieser Zeit der Schwerpunkt des Körpers in der Verticalebene durch die Drehaxe, so gibt die Gleichung (d) der gedachten Nummer

$$\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi_1\sqrt{\frac{g\partial}{k^2+\partial^2}}, \tag{h}$$

womit man aus dem beobachteten Ausschlage die durch den Stoss erlangte Winkelgeschwindigkeit oder auch die Grösse des Stosses

$$\int_0^t N\,dt$$

berechnen kann.

Man gebraucht diese Formeln, um die Wirkung kurzdauernder electrischer Ströme auf Magnetnadeln zu berechnen, wobei statt der Schwerkraft die Wirkung des Erdmagnetismus auf die Magnetnadel in Rechnung zu ziehen ist; oder bei der Bestimmung der Geschwindigkeit der Projectile der Artillerie mit Hülfe des Pendels von Robins. Auf das letzte wollen wir hier noch etwas näher eingehen. Das genannte Pendel besteht aus einer sehr bedeutenden Masse, welche durch eine solid befestigte, horizontale Axe getragen wird. Die Kugel, deren Geschwindigkeit gemessen werden soll,

dringt in die Masse des Pendels ein, bleibt darin stecken und ertheilt dem Pendel die Anfangsgeschwindigkeit. Man misst den Ausschlag, welchen das Pendel hierdurch erlangt.

Ist μ die Masse der Kugel und v die Geschwindigkeit, mit welcher sie am Pendel anlangt, nennt man N den Druck, welchen die Kugel auf das Pendel ausübt, und welcher rückwärts vom Pendel auf die Kugel ausgeübt wird, so gibt der Satz über den Antrieb für die Bewegung der Kugel

$$\mu v' - \mu v = -\int_0^t N\,dt,$$

worin v' die Geschwindigkeit ist, welche die Kugel am Ende der Zeit t, welche vom Augenblicke des beginnenden Eindringens gezählt ist, noch hat. Diese muss aber am Ende des Stosses der Geschwindigkeit der von ihr berührten Stelle des Pendels gleich sein, oder mit der obigen Bezeichnung gleich $n\omega$. Man hat daher

$$\mu v = \mu n \omega + \int_0^t N\,dt$$

$$= \mu n \omega + \frac{Q}{n}\omega$$

$$= \frac{\mu n^2 + Q}{n}\omega.$$

Nach dem Stosse bildet die Kugel und das Pendel einen Körper; sein Trägheitsmoment sei Q_1, so wird

$$\omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi_1 \sqrt{\frac{m g \partial}{Q_1}}.$$

Aus beiden Gleichungen lässt sich v berechnen.

Die Trägheitsmomente Q und Q_1 bestimmt man aus den beobachteten Schwingungsdauern der beiden Pendel, mit und ohne Kugel, woraus man z. B. für die Schwingungsdauer τ_1 des zweiten

$$Q_1 = \frac{\tau_1^2}{\pi^2} m \partial g$$

und

$$\omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi_1 \cdot \frac{\pi}{\tau_1}$$

findet.

Der Stoss auf das Lager.

171. Der Druck auf das Lager während des Stosses ist in der Richtung der Bewegung

$$Y = N - m\partial\frac{d\omega}{dt},$$

Gleichung (28 in Nro. 161) oder

$$Y = N - m\partial\frac{Nn}{Q}.$$

Soll dieser gleich Null werden, so muss

$$n = \frac{Q}{m\partial} = \frac{k^2 + \partial^2}{\partial}$$

sein; man sieht, dass n die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Drehaxe ist. Dieser Punkt heisst desshalb auch der Mittelpunkt des Stosses. Damit, dass Y gleich Null wird, ist aber noch keineswegs gesagt, dass auch die Drücke auf die einzelnen Zapfenlager Null werden; diese können noch immer ein Kräftepaar sein (Nro. 193).

Wird Y nicht gleich Null, so ist der Stoss auf die Lager in der Richtung der Bewegung

$$\int_0^t Y\,dt = \left(1 - \frac{\partial n}{k^2 + \partial^2}\right)\int_0^t N\,dt$$

$$= m(\omega - \omega_0)\frac{k^2 + \partial^2 - n\partial}{n}. \qquad (1)$$

Ist $\omega - \omega_0$ positiv, so wird dieser Stoss in der Richtung der Bewegung liegen, wenn $k^2 + \partial^2 - n\partial$ positiv ist, andernfalls der Richtung der Bewegung entgegen. Ist $\omega - \omega_0$ negativ, so ist diess umgekehrt.

Die statischen Momente der Kräfte an einem starren Körper.

172. Kennt man das statische Moment der Kräfte an einem starren Körper für eine Axe, so kann man damit das Moment für eine zur ersten parallelen Axe in folgender Weise finden. Ist z die

Axe, für welche man das Moment M_z kennt, sind P_x, P'_x... die Componenten der Kräfte parallel zu der auf z senkrechten Axe x; ebenso P_y, P'_y... parallel zu der y Axe, welche senkrecht auf z und x stehen soll; sind x, x'..., y, y'... die Coordinaten der Angriffspunkte dieser Kräfte; sind a und b die Coordinaten der neuen zu z parallelen Drehaxe c: so hat man das Moment der Kräfte für diese Axe

$$M_c = \Sigma[P_y(x-a) - P_x(y-b)] =$$
$$= \Sigma(P_y x - P_x y) - a\Sigma P_y + b\Sigma P_x .$$

Das erste Glied rechts ist das statische Moment der Kräfte für die z Axe; die beiden letzten Glieder sind das negative statische Moment aller Kräfte für die z Axe, wenn diese Kräfte parallel zu sich mit ihren Angriffspunkten in die c Axe verlegt werden. Man hat also, um das statische Moment der Kräfte für die c Axe zu finden, von dem Momente für die z Axe das Moment aller Kräfte diese mit ihren Angriffspunkten in die c Axe verschoben, abzuziehen, dieses Moment ebenfalls für die z Axe genommen.

173. Das statische Moment einer Kraft P für eine Axe n ist, wenn ∂ die kürzeste Entfernung von P und n ist (Nro. 159)

$$M_n = P\sin(P,n).\partial .$$

Sind x_0 und y_0 die Coordinaten des Schnittpunktes von P mit der willkührlichen Ebene x, y, den Ursprung der Coordinaten in n genommen, so ist

$$\partial\sin(P,n) = -[x_0(\cos(n,y)\cos(P,z) - \cos(n,z)\cos P,y) +$$
$$+ y_0(\cos(n,z)\cos(P,x) - \cos(n,x)\cos P,z)] .$$

Setzt man die Momente der Kraft P in Beziehung auf die Coordinatenaxen x, y, z gleich M_x, M_y, M_z, so hat man

$$M_x = P\cos(P,z).y_0 ;\ M_y = -P\cos(P,z).x_0 \text{ und}$$
$$M_z = P\cos(P,y).x_0 - P\cos(P,x).y_0 .$$

Damit wird das Moment der Kraft P für die Axe n

$$M_n = M_x\cos(n,x) + M_y\cos(n,y) + M_z\cos(n,z).$$

Man findet daher das Moment für die Drehaxe n, wenn man die Momente für die Coordinatenaxen als Längen auf diese aufträgt, und diese Längen auf n projicirt und dort addirt.

Setzt man

$$M_x = M\cos(M,x);\ M_y = M\cos(M,y);\ M_z = M\cos(M,z),$$

wo M nach Richtung und Grösse durch die Diagonale des Parallelepipeds über M_x, M_y, M_z gegeben ist, so wird

$$M_n = M\,[\cos(M,x)\cos(n,x) + \cos(M,y)\cos(n,y) + \\ + \cos(M,z)\cos(n,z)] = M\cos(M,n).$$

Es ist also das Moment für die Axe n gleich der Projection von M auf n.

Das grösste Moment hat daher die Kraft P für die Axe M und dieses ist gleich M, dessen Construction oben angegeben ist.

Für eine Axe rechtwinklich auf M wird das Moment der Kraft gleich Null; die Axen, welche in einer durch den Ursprung der Coordinaten gehenden, zu M rechtwinklichen Ebene liegen, werden daher entweder von der Kraft P geschnitten, oder gehen dieser parallel. Die Axe des grössten Momentes für alle durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Axen steht daher rechtwinklich auf der durch diesen Ursprung und die Kraft P gehenden Ebene.

174. Was hier für eine Kraft gezeigt wurde, kann auf eine beliebige Reihe von Kräften ausgedehnt werden. Die Summe der Momente dieser Kräfte für eine Axe n, welche durch den Ursprung der Coordinaten x, y, z geht, findet man

$$\Sigma M_n = \cos(n,x)\,\Sigma M_x + \cos(n,y)\,\Sigma M_y + \cos(n,z)\,\Sigma M_z.$$

Bestimmt man dann M durch die Gleichungen

$$\Sigma M_x = M\cos(M,x);\ \Sigma M_y = M\cos(M,y);\ \Sigma M_z = M\cos(M,z), \tag{31}$$

so erhält man wie oben

$$\Sigma M_n = M\cos(M,n), \tag{32}$$

und hat M als das grösste Moment aller Kräfte, welches aus (31) oder der entsprechenden Construction des Parallelepipeds mit den Seiten ΣM_x, ΣM_y, ΣM_z erhalten wird.

Wir nennen das durch (31) bestimmte grösste statische Moment für die durch den Punkt O gehenden Axen das *statische Moment um diesen Punkt.*

Die Gleichungen (31) und (32) zeigen noch, dass man stati-

sche Momente nach denselben Regeln wie Kräfte zusammensetzen und zerlegen könne.

175. Für irgend einen andern Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, findet man die statischen Momente für die zu x, y, z parallelen Axen nach dem Satze in (Nro. 172), wenn man die Summe der Componenten der Kräfte nach den Richtungen x, y, z mit X, Y, Z bezeichnet

$$M'_x = M_x - Zy + Yz;\ M'_y = M_y - Xz + Zx;$$
$$M'_z = M_z - Yx + Xy. \qquad (a)$$

Setzt man die Kräfte X, Y, Z in dem Punkte x, y, z zu einer Resultirenden R zusammen, so sind die statischen Momente dieser Kraft R für die durch O gehenden Axen dieselben, in welchem Punkte der Richtung R man diese angebracht denkt. Es sind also die M'_x, M'_y, M'_z und daraus auch M' unabhängig von der Lage des Punktes x, y, z, wenn dieser nur in der geraden Linie R bleibt, Nennt man das grösste Moment der Kraft R für den Punkt O, N, so ist

$$N = \pm Rr$$

wo r die Entfernung der Linie R von O ist, und das Zeichen von der Richtung der versuchten Drehung abhängt. Die Axe N liegt rechtwinklich auf O, R, und kann immer nach der Seite hingenommen werden, für welche die Drehungsrichtung die positive ist, so dass immer

$$N = + Rr \qquad (b)$$

ist.

Für alle Linien, die zu R parallel sind, und in demselben Abstande von O liegen, ist N dasselbe der Grösse nach. Alle diese Axen N liegen in einer durch O gehenden, zu R normalen Ebene. Setzt man die Momente der Kraft R für die Axe Ox, Oy, Oz gleich

$$N_x,\quad N_y,\quad N_z,$$

so werden die Gleichungen (a)

$$M'_x = M_x - N_x;\ M'_y = M_y - N_y;\ M'_z = M_z - N_z;$$

woraus

$$M'^2 = M^2 + N^2 - 2M_xN_x - 2M_yN_y - 2M_zN_z.$$

Nun ist

$$M_x = M\cos(M,x);\ M_y = M\cos(M,y);\ M_z = M\cos(M,z);$$
$$N_x = N\cos(N,x);\ N_y = N\cos(N,y);\ N_z = N\cos(N,z).$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so erhält man

$$M'^2 = M^2 + N^2 - 2MN\cos(M,N), \qquad \text{(c)}$$

oder das Moment für einen der Punkte der geraden Linie R ist die Diagonale des Parallelogramms, das über M und — N beschrieben ist.

Dreht man die gerade Linie R in der gleich bleibenden Entfernung r um den Punkt O, so bleiben M und N dieselben, aber N dreht sich mit R, und dadurch wird der Winkel M, N ein anderer; den kleinsten und grössten Werth hat der Winkel M, N, wenn r, die Senkrechte von O auf R, zugleich rechtwinklich auf M steht, oder die kürzeste Entfernung beider ist, oder N in der durch M zu R parallelen Ebene liegt.

Ist α der Winkel M, R, so wird hierfür

$$M,N = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ oder } \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Der eine dieser Winkel gibt den grössten; der andere den kleinsten der zu r gehörigen Werthe von M'.

Der kleinste Werth von M' für ein beliebiges r, wie man aus der Construction des Parallelogramms über M und $-N = Rr$ sieht, gehört zu

$$N = M\sin\alpha \qquad \text{(d)}$$

und ist gleich

$$M' = M\cos\alpha. \qquad \text{(e)}$$

Dieses kleinste Moment ergibt sich also für

$$r = \frac{M\sin\alpha}{R} \qquad \text{(f)}$$

Dieses r liegt rechtwinklich auf der Ebene durch M parallel zu R.

Will man die Grösse des Momentes durch die M_x, M_y, M_z und X, Y, Z ausdrücken, so hat man hierzu

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M}\cdot\frac{X}{R} + \frac{M_y}{M}\cdot\frac{Y}{R} + \frac{M_z}{M}\cdot\frac{Z}{R},$$

oder
$$M' = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{R}. \tag{g}$$

Dieses kleinste Moment für irgend einen Punkt kann aus (e) nur Null werden, wenn α ein rechter Winkel ist, also das Moment M auf R rechtwinklich steht, welche Bedingung auch durch
$$X M_x + Y M_y + Z M_z = 0 \tag{h}$$
ausgedrückt ist.

Sind die Kräfte auf einen Punkt übertragen im Gleichgewichte, oder was dasselbe ist, ist $R = 0$, so ist $N = 0$ und das Moment dieser Kräfte ist für jeden Punkt dasselbe.

Ist endlich M gleich Null und R nicht gleich Null, so ist die durch O gehende Gerade R der Ort der Punkte der kleinsten Momente, welche alle gleich Null sind.

Sind M und R gleich Null, so haben die Kräfte für keine Drehaxe, wie diese gewählt wird, ein statisches Moment, ein Bestreben Drehung hervorzubringen.

Gleichgewicht der Kräfte an einem starren Körper.

176. Haben die Kräfte an einem starren Körper für einen beliebig gewählten Punkt O das statische Moment M, so bringen diese Kräfte um jede durch O gelegte Axe, welche nicht rechtwinklich auf der Axe des Momentes M steht, Drehung hervor, und sind also nicht im Gleichgewichte. Für das Gleichgewicht der Kräfte ist daher erforderlich, dass $M = 0$ sei, oder wenn man mit M_x, M_y, M_z die statischen Momente für drei in dem Punkte O sich schneidende rechtwinkliche Axen nennt, wegen
$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2,$$
$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0. \tag{a}$$
Ist diese Bedingung erfüllt, so ist für jede durch den Punkte O gehende Axe das Drehmoment der Kräfte gleich Null, oder diese bringen um keine dieser Axen Drehung hervor.

Hier können also die Kräfte nur einen Druck auf diesen Punkt

ausüben, oder sich auf eine Kraft reduciren, welche durch diesen Punkt geht, oder endlich unter sich im Gleichgewichte sein.

Hat man ebenso für einen zweiten Punkt O′ das statische Moment um diesen Punkt gleich Null, so müssen die Kräfte sich auf einen Druck oder Zug reduciren, welcher die Richtung OO′ hat, oder sie müssen keinerlei Bewegung hervorbringen, sie müssen unter sich im Gleichgewichte sein.

Ist endlich noch für einen dritten Punkt O″, welcher mit den beiden ersten nicht in einer Geraden liegt, das statische Moment um diesen Punkt Null, so können die Kräfte an dem Körper überhaupt keine Bewegung hervorbringen; sie sind unter sich im Gleichgewichte. Dann wird das statische Moment der Kräfte um jeden Punkt gleich Null sein.

Damit das letzte der Fall ist, genügt nach der vorhergehenden Nummer, neben der Bedingung $M = 0$, dass die Resultirende der parallel zu sich in einen Punkt übertragenen Kräfte, R, gleich Null werde. Sind X, Y, Z die Summen der Componenten der Kräfte nach drei unter sich rechtwinklichen Axen Ox, Oy, Oz, so ist

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

und die Bedingung $R = 0$ zerfällt in

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = 0. \tag{b}$$

Die Bedingungen des Gleichgewichtes der Kräfte an einem starren Körper sind also;

Erstlich, dass die Summen der Componenten der Kräfte nach drei unter sich rechtwinklichen Richtungen einzeln gleich Null sind; und

Zweitens, dass die Summen der statischen Momente der Kräfte für drei unter sich rechtwinkliche, sich in einem beliebig gewählten Punkte schneidende Axen einzeln gleich Null sind.

177. Sind die Gleichungen (b) der vorhergehenden Nummer erfüllt, heben sich also die Kräfte an dem Körper, alle auf einen Punkt übertragen, auf, ohne dass das Moment M um den Punkt O Null ist, so ist nach (Nro. 175) das Moment um jeden Punkt gleich M.

Bringt man an diesem Körper ein Kräftepaar an, das die Axe M

hat und dessen Moment gleich $-M$ ist, so wird nun das Moment aller Kräfte um den Punkt O gleich

$$M - M = 0,$$

während zugleich die Resultirende aller Kräfte, diese an einen Punkt übertragen, gleich Null bleibt, weil sich die beiden Kräfte des Kräftepaars hier aufheben. Das gegebene Kräftesystem kann daher durch ein Kräftepaar vom Momente $-M$ ins Gleichgewicht gebracht werden. Die Bewegung, welche das Kräftesystem hervorbringt, ist daher dasselbe, welche ein Kräftepaar mit dem Momente M und der Axe M hervorbringt, oder das Kräftesystem kann durch ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Lage und Moment M angibt, das nach (Nro. 174, Gleichung 31) bestimmt werden kann.

178. Sind die Gleichungen (a) in (Nro. 166) erfüllt, aber die Gleichungen (b) nicht, so reducirt sich das System der Kräfte auf eine einzige Kraft R, welche durch den Punkt O, für welchen die Momente gleich Null sind, geht.

179. Sind weder die Gleichungen (a) noch (b) erfüllt, so kann man versuchen, ob es möglich ist, das Kräftesystem durch eine einzige Kraft ins Gleichgewicht zu setzen, in welchem Falle das Kräftesystem durch eine einzige Resultirende, welche jener Kraft gleich und entgegengesetzt ist, ersetzt werden kann.

Ist wie bisher R die Resultirende der in einen Punkt übertragenen Kräfte, so muss die Kraft, welche das System ins Gleichgewicht bringen soll, gleich $-R$ sein, wodurch für alle Kräfte die Bedingungen (b) in (Nro. 176) erfüllt sind.

Damit auch das Moment aller Kräfte um den willkührlich gewählten Punkt O Null werde, muss, wenn M das Moment der gegebenen Kräfte um diesen Punkt ist, das Moment der Kraft $-R$ um diesen Punkt gleich $-M$ sein, und seine Axe mit der Axe M in eine Linie fallen. Die Axe des Momentes um einen Punkt O, einer Kraft $-R$ steht aber rechtwinklich auf O, R, und darauf muss also auch M rechtwinklich stehen. Die Grösse $-M$ des Momentes kann man immer dadurch erhalten, dass man $-R$ bis zu der Entfernung r hinausrückt, für welche

$$-M = -Rr$$

ist.

Die Bedingung, dass durch eine einzige Kraft Gleichgewicht hervorgebracht werden kann, oder die Bedingung, dass das Kräftesystem eine einzige Resultirende habe, ist daher, dass M rechtwinklich auf R stehe, welche durch die Bedingung (h) in (Nro. 175)

$$X M_x + Y M_y + Z M_z = 0 \qquad \text{(h)}$$

ausgedrückt ist.

180. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man immer durch zwei Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen, zwei windschief gegen einander liegende Kräfte das System ins Gleichgewicht bringen.

Bringt man im Punkte O eine Kraft — R an und zugleich ein Kräftepaar, dessen Moment — M ist, so ist dadurch das Moment aller Kräfte um O gleich Null und die Resultirende aller in einen Punkt verlegten Kräfte gleich Null, also den Bedingungen des Gleichgewichtes genügt.

Da man die eine der Kräfte des Kräftepaars immer durch O gehen lassen kann, durch welchen Punkt auch — R geht, so kann man diese beiden Kräfte zu einer zusammensetzen, welche mit der andern Kraft des Paars die gegebenen Kräfte ins Gleichgewicht bringt.

181. Kräfte an einem starren Körper lassen sich daher immer durch zwei Kräfte ersetzen. Liegen diese in einer Ebene, so geben sie eine einzige Resultirende für das Kräftesystem oder ein Kräftepaar, oder endlich sie sind im Gleichgewichte.

182. Aufgabe. Die Massentheile eines starren Körpers werden durch parallele Kräfte angegriffen, welche den Massentheilen proportional sind. Die Resultirende dieser Kräfte und ihren Angriffspunkt anzugeben.

Ist dm ein Massentheil des Körpers und $f dm$ die Kraft, welche diese Masse angreift, wobei f constant, so ist die Grösse der Resultirenden

$$f m$$

wenn m die ganze Masse des Körpers ist. Diese Resultirende ist den Kräften $f dm$ parallel.

Um die Lage der Resultirenden zu erhalten, nehme ich ein

Axensystem an; die Axe der z parallel zu f dm, die x und y rechtwinklich darauf. Die Coordinaten des Massentheils dm seien x, y, z; die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden seien x_1, y_1, z_1. Bringt man eine Kraft in diesem Punkte an, welche der Resultirenden gleich aber entgegengesetzt ist, so wird Gleichgewicht eintreten. Die Bedingungen (a) des Gleichgewichtes geben hier

$$\int y f dm - f m y_1 = 0 \text{ oder } m y_1 = \int y dm,$$

$$\int x f dm - f m x_1 = 0 \text{ oder } m x_1 = \int x dm,$$

während man für die z Axe keine Momente erhält. Diese beiden Gleichungen bestimmen eine der z Axe parallele Linie, welche durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. Die Resultirende geht daher durch den Massenmittelpunkt des Körpers, und zwar da die Richtung von f willkürlich ist, wie die Kräfte gerichtet sind. Der Massenmittelpunkt heisst hiernach auch wohl der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Ist f die Schwerkraft, so ergibt sich mit dem obigen, dass auch die Resultirende der Schwerkräfte, welche die Theile eines schweren Körpers angreifen, durch den Massenmittelpunkt gehen, und dieser heisst desshalb auch der Schwerpunkt eines Körpers. Die Schwerkräfte an den einzelnen Massentheilen eines Körpers kann man daher immer durch das an dem Schwerpunkte desselben angebrachte Gewicht des Körpers ersetzen.

183. Aufgabe. Die Massentheile einer homogenen Kugel werden gegen einen Punkt A mit Kräften angezogen, welche den Massen proportional und dem Quadrate des Abstandes der Massen von A umgekehrt proportional sind. Diese Kräfte wo möglich durch eine Resultirende zu ersetzen.

Da alle Kräfte durch den Punkt A gehen, haben sie eine Resultirende, welche ebenfalls durch diesen Punkt A geht.

Ist dm ein Massentheil, r seine Entfernung von A, so ist die auf dm wirkende Kraft

$$f \frac{dm}{r^2},$$

wo f eine Constante ist.

Legt man durch den Mittelpunkt der Kugel O drei rechtwinkliche Coordinatenaxen O x, O y, O z, von welchen die erste durch A gehe, so ist die Componente der auf d m wirkenden Kraft parallel O x, wenn a die Entfernung O A ist

$$f \frac{dm}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r},$$

wobei x die Coordinate von d m ist. Sind die beiden andern Coordinaten y und z, so hat man

$$r^2 = (a-x)^2 + y^2 + z^2$$

und kann daher

$$\frac{a-x}{r^3} = -\frac{d\frac{1}{r}}{da}$$

setzen. Damit erhält man für die obige Componente den leichter zu behandelnden Ausdruck

$$-f\frac{d\frac{dm}{r}}{da}$$

und für die Summe dieser Componenten

$$-f\frac{d\int\frac{dm}{r}}{da}, \tag{a}$$

wobei das Integral über alle Theile der Kugel auszudehnen ist. Setzt man

$$\int\frac{dm}{r} = V,$$

das Integral wieder über die ganze Kugel ausgedehnt, so hat man zuerst dieses V zu bestimmen.

Beschreibt man um O zwei Kugelflächen mit den Halbmessern ϱ und $\varrho + d\varrho$; beschreibt man ferner zwei Kugelflächen, welche ihre Spitzen in O haben und O x als Axe, deren Oeffnungen die Winkel θ und $\theta + d\theta$ sind; schneidet man endlich diese Flächen durch zwei Ebenen, welche durch O x gehen und mit der Ebene x, z die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ bilden, so ist das Volumen des Elementes, das durch diese sechs Flächen begrenzt ist

$$\varrho^2 \sin\theta \, d\varrho \, d\theta \, d\varphi$$

und wenn Δ die Dichte der Kugel ist, die Masse dieses Elementes, welche wir für dm nehmen

$$dm = \Delta \varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\varphi.$$

Für r^2 erhält man mit diesen Coordinaten den Ausdruck

$$r^2 = \varrho^2 + a^2 - 2a\varrho\cos\theta.$$

und damit

$$V = \Delta \int\int\int \frac{\varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 + a^2 - 2a\varrho\cos\theta}}.$$

Die Integration nach φ ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ auszudehnen; sie gibt

$$V = 2\pi\Delta \int\int \frac{\varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta}{\sqrt{\varrho^2 + a^2 - 2a\varrho\cos\theta}}.$$

Die Integration nach θ ist von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ auszudehnen; sie gibt

$$V = \frac{2\pi\Delta}{a}\int \varrho\,[\pm(\varrho + a) \mp (\varrho - a)]\, d\varrho.$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{\varrho^2 + a^2 \mp 2a\varrho}$$

gibt die Werthe der Entfernung des Punktes a von den beiden Enden der Kugelschichte vom Halbmesser ϱ für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Man hat daher für $\theta = \pi$ hierfür immer $\varrho + a$ zu nehmen; für $\theta = 0$ aber $a - \varrho$, wenn $a > \varrho$ ist, dagegen $\varrho - a$ wenn $a < \varrho$ ist, oder das erste, wenn der Punkt A ausserhalb dieser Kugelschichte liegt, das letzte, wenn er innerhalb derselben liegt; für $\varrho = a$ sind beide Werthe einander gleich und gleich Null. Damit erhält man, wenn A ausserhalb der Kugelschichte vom Halbmesser ϱ liegt

$$V = \frac{4\pi\Delta}{a}\int \varrho^2 d\varrho; \tag{b}$$

liegt dagegen A innerhalb der Kugelschichte vom Halbmesser ϱ

$$V = 4\pi\Delta \int \varrho\, d\varrho. \tag{c}$$

Liegt der Punkt A ausserhalb der Kugel, so hat man den ersten Werth von V von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varrho_1$, dem Halbmesser der Kugel und daher

$$V = \frac{4}{3}\,\frac{\pi \Delta \varrho_1{}^3}{a} = \frac{m}{a}, \tag{d}$$

wenn m die Masse der ganzen Kugel ist.

Die Summe der Componenten aller Kräfte, welche die Massentheile der Kugel gegen A anziehen ist daher nach (a)

$$-f\frac{d\frac{m}{a}}{da} = f\frac{m}{a^2}, \tag{e}$$

oder sie ist dieselbe, als ob die ganze Masse m in dem Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre. Da die Kräfte rechtwinklich auf Ox sich paarweise aufheben, so ist diese Summe zugleich die Resultirende aller auf die Kugel wirkenden Theile.

Liegt dagegen der Anziehungspunkt in der Kugel, so kann man diese in eine Kugel vom Halbmesser a und in eine Kugelschale von hier weg theilen. Für die letzte ist der Anziehungspunkt ein innerer Punkt, für welche der zweite Werth von V unabhängig von a ist. Die anziehende Kraft für irgend eine dieser Kugelschichten ist

$$-f\frac{dV}{da} = 0,$$

also auch für alle, und es bleibt daher nur die Anziehung auf die Kugel vom Halbmesser a, welche nach (e) gleich

$$f\frac{m}{a^2}$$

ist, wo m die Masse der Kugel vom Halbmesser a ist. Diese ist $\frac{4}{3}\,a^3\pi\Delta$, womit die Anziehung auf die Kugel durch einen inneren Punkt

$$\frac{4}{3}\,f\pi\Delta a \tag{f}$$

wird. Diese ist daher der Entfernung des Punktes A von dem Mittelpunkte der Kugel proportional.

Liegt der anziehende Punkt auf der Oberfläche der Kugel, so fallen die beiden Ausdrücke (e) und (f) zusammen.

Es ist leicht zu sehen, dass die Schlüsse dieselben bleiben, wenn die Kugel aus concentrischen homogenen Kugelschichten be-

steht, deren Dichte von einer zur andern Schichte sich ändert. Nur die Formel (f) muss dann durch

$$f\frac{m}{a^2}$$

ersetzt werden, wo m die Masse der Kugel vom Halbmesser a ist.

184. Aufgabe. Ein schwerer Magnet ist an einem Faden aufgehängt; auf ihn wirkt ausser der Schwere der Erdmagnetismus, welcher den Nordmagnetismus des Magnets anzieht und den Südmagnetismus desselben eben so stark und in derselben Richtung abstosst. Die Gleichgewichtsbedingungen für diesen Magnet anzugeben.

Ist dv ein Volumelement des Magnets, so sei $T\mu dv$ die Kraft, welche von der Erde auf den Magnetismus in diesem Elemente des Volums einwirkt, dabei T eine Constante, die Intensität des Erdmagnetismus und μdv die Menge des Magnetismus in dem Elemente dv und zwar positiv, wenn diess Nordmagnetismus ist, negativ andernfalls, was der entgegengesetzten Richtung der Kraft in beiden Fällen entspricht. Damit die Gesammtanziehung des Nordmagnetismus und die Abstossung des Südmagnetismus gleich gross werden, muss

$$\int \mu dv = 0 \tag{a}$$

werden, wenn man das Integral über alle Volumtheile des Magnets ausdehnt.

Die Richtung der positiven Kraft $T\mu dv$ sei gegeben durch die Lage des magnetischen Meridians und die Inclination. In der ersten ziehen wir durch den Aufhängepunkt O des Körpers die horizontale Coordinatenaxe der x gegen Norden; i sei die Inclination des Magnetismus, so dass also die Kraft $T\mu dv$ in der Verticalebene durch Ox liege und den Winkel i mit Ox unter den Horizont gemessen, mache.

Für ein Element des Volums dv ist dann die horizontale Kraft des Erdmagnetismus

$$T\mu dv \cos i,$$

die verticale abwärts, welches die Richtung der z sei

$$T\mu dv \sin i.$$

Sind die y rechtwinklich auf beide, x und z, gemessen, so ist die Kraft des Erdmagnetismus parallel y gleich Null.

Vertical abwärts wirkt auf den Körper die Schwere, deren Resultirende m g sei; sie geht durch den Schwerpunkt, dessen Coordinaten a, b, c seien.

Endlich wirkt an dem Körper noch die Spannung des ihn tragenden Fadens, die Componenten von ihr nach den Richtungen x, y, z seien

$$S_x, \quad S_y, \quad S_z.$$

Damit hat man die Summe der Componenten aller Kräfte nach den Richtungen der Coordinatenaxen

$$T \cos i \int \mu \, dv + S_x = X,$$
$$S_y = Y,$$
$$T \sin i \int \mu \, dv + S_z + m g = Z,$$

welche sich wegen (a) auf

$$S_x = X; \quad S_y = Y; \quad S_z + m g = Z \qquad \text{(b)}$$

reduciren.

Die Summe der Momente für die Coordinatenaxen erhält man

$$m g b + T \sin i \int y \mu \, dv = M_x,$$
$$- m g a - T \sin i \int x \mu \, dv + T \cos i \int z \mu \, dv = M_y, \qquad \text{(c)}$$
$$- T \cos i \int y \mu \, dv = M_z.$$

Die Werthe von S_x, S_y, S_z hängen von der Spannung des Fadens und der Neigung ab, welche er in dem betrachteten Momente hat. Man hat

$$S_x = S \cos(S, x); \quad S_y = S \cos(S, y); \quad S_z = S \cos(S, z),$$

worin die Winkel als gegeben zu betrachten sind.

Für das Gleichgewicht müssen X, Y, Z einzeln gleich Null sein; es müssen also

$\cos(S, x) = 0$; $\cos(S, y) = 0$ sein, woraus $\cos(S, z) = \pm 1$ folgt. Die Gleichung

$$S_z + m g = 0.$$

gibt hierzu $S, z = \pi$ und $S = m g$. Der Faden hängt also in der Ruhe vertical und seine Spannung ist dem Gewichte des Magnets gleich.

Setzt man

$$\begin{aligned} \int x \mu \, d v &= W \cos(W, x), \\ \int y \mu \, d v &= W \cos(W, y), \\ \int z \mu \, d v &= W \cos(W, z), \end{aligned} \tag{d}$$

so ist, wenn n eine beliebige Richtung ist, welche durch O gezogen ist, und wenn unter der Grösse n der Abstand der Projection von dv auf n vom Punkte O verstanden wird

$$n = x \cos(n, x) + y \cos(n, y) + z \cos(n, z),$$

womit

$$\int n \mu \, d v = W \cos(W, n)$$

gefunden wird. Es ist also W der grösste Werth, den die Summe $\int n \mu \, d v$ für irgend eine Richtung annehmen kann. Man nennt diesen grössten Werth das magnetische Moment des Magnets, und die Richtung n, für welche man dieses Maximum findet, das ist die durch (d) bestimmte Richtung W die magnetische Axe.

Damit gibt die letzte der Gleichungen (c) für das Gleichgewicht die Bedingung

$$- T W \cos i \cos(W, y) = M_z = 0,$$

was

$$\cos(W, Y) = 0$$

gibt. Die magnetische Axe des Magnets muss für's Gleichgewicht mit der y Axe einen rechten Winkel bilden, also der Verticalebene x, z, dem magnetischen Meridiane parallel sein.

Die erste der Gleichungen (c) gibt damit die Gleichgewichtsbedingung

$$b = 0;$$

der Schwerpunkt des Magnets muss ebenfalls in dem magnetischen Meridiane liegen.

Die zweite der Gleichungen (c) wird endlich

$$m g a + T W [\sin i \cos(W, x) - \cos i \cos(W, z)] = 0$$

was, weil W der Ebene x, z parallel ist

$$m g a + T W \sin[i - (W, x)] = 0$$

gibt, woraus die Neigung der magnetischen Axe für die Gleichgewichtslage folgt, nämlich

$$\sin[(W, x) - i] = \frac{m g a}{T W}.$$

Ist $a = 0$, d. h. liegt der Schwerpunkt des Magnets in der Verticalen durch den Aufhängepunkt, so

$$W, x = i \text{ fürs Gleichgewicht.}$$

185. Sind die Gleichgewichtsbedingungen durch die Lage der magnetischen Axe und des Schwerpunktes nicht erfüllt, so kann man verlangen, die an dem Magnete wirkenden Kräfte auf die kleinste Zahl, d. h. auf zwei zu reduciren. Ich setze dabei voraus, der Faden hänge vertical herunter, so dass S_x und S_y gleich Null sind.

Um das Moment um den Punkt O zu finden, kann man zuerst die Momente der Schwerkraft und der magnetischen Kräfte abgesondert suchen.

Bezeichnet man das statische Moment der Schwerkraft um den Punkt O mit G, so ist

$$G \cos(G, x) = m g b,$$
$$G \cos(G, y) = - m g a,$$
$$G \cos(G, z) = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass die Axe dieses Momentes horizontal liegt $\left(G, z = \frac{\pi}{2}\right)$ und dass sie mit der x Axe Winkel bildet, die durch

$$\cos(G, x) = \frac{m g b}{G} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos(G, y) = - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

gegeben sind. Diese Winkel sind zwischen 0 und π zu nehmen. Diese Axe liegt daher rechtwinklich auf der Verbindungslinie des Ursprungs O mit der Horizontalprojection des Schwerpunktes. Das Moment selbst ist

$$G = m g \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das statische Moment der magnetischen Kräfte bezeichne ich um den Punkt O mit M. Damit ist

$$M \cos(M,x) = T W \sin i \cos(W,y),$$
$$M \cos(M,y) = -T W [\sin i \cos(W,x) - \cos i \cos(W,z)],$$
und
$$M \cos(M,z) = -T W \cos i \cos(W,y).$$

Zieht man durch O eine Linie rechtwinklich auf die Richtung von T in der Ebene x, z, welche n heissen mag, und welche nach der Richtung genommen werden soll, für welche $\cos(n,x) = \sin i$ und $\cos(n,z) = -\cos i$ ist, so wird

$$\sin i \cos(W,x) - \cos i \cos(W,z) = \cos(W,n)$$

und damit die zweite Gleichung

$$M \cos(M,y) = -T W \cos(W,n).$$

Quadrirt man die drei Gleichungen und addirt sie, so erhält man

$$M^2 = T^2 W^2 [\cos(W,y)^2 + \cos(W,n)^2].$$

y, n und T sind Richtungen, welche aufeinander rechtwinklich stehen, die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel von W mit diesen drei Richtungen muss daher 1 sein. Damit wird die letzte Gleichung

$$M = T W \sin(W,T).$$

Diess ist das statische Moment der magnetischen Kräfte um den Punkt O; wie man sieht, ist dasselbe nur von der Lage und Grösse der magnetischen Axe und der Richtung und Grösse des Erdmagnetismus abhängig, aber unabhängig von der Lage des Punktes O. Die Richtung von M ergeben die Gleichungen

$$\cos(M,x) = \frac{\sin i \cos(W,y)}{\sin(W,T)} = \frac{\cos(n,x) \cos(W,y)}{\sin(W,T)},$$

$$\cos(M,y) = -\frac{\cos(W,n)}{\sin(W,T)},$$

$$\cos(M,z) = -\frac{\cos i \cos(W,y)}{\sin(W,T)} = \frac{\cos(n,z) \cos(W,y)}{\sin(W,T)},$$

oder für die erste und dritte einfacher

$$\cos(M,n) = \frac{\cos(W,y)}{\sin(W,T)} \text{ und } \cos(M,T) = 0.$$

Die Axe des statischen Momentes der magnetischen Kräfte steht daher rechtwinklich auf der Richtung des Erdmagnetismus.

Sieht man von den Kräften ab, welche aus der Bewegung ent-

stehen, so hat man $X = Y = Z = 0$ und kann daher für die vorhandenen Kräfte zwei Kräftepaare setzen, von welchen das eine das Moment G und das andere das Moment M hat. Will man diese auf ein Kräftepaar reduciren, so kann man je zwei der Kräfte sich schneiden lassen, und diese dann zusammen setzen, oder man kann die Momente G und M zusammensetzen, wodurch man das resultirende Moment und die Axe des resultirenden Kräftepaars erhält.

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers.

186. Das Trägheitsmoment eines starren Körpers für eine gegebene Drehaxe ist nach Nro. 161 die Summe der Produkte aus jedem Massentheil des Körpers in das Quadrat seiner Entfernung von der Drehaxe. In Nro. 162 sind die Trägheitsmomente für Axen durch die Schwerpunkte mehrerer regelmässiger Körper angegeben, und in Nro. 163 ist gezeigt, wie man damit die Trägheitsmomente für zu den ersten Axen parallele Axen finden kann. Hier stellen wir uns die Aufgabe, das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Axe zu finden, aus den Trägheitsmomenten für drei unter sich rechtwinklichen Axen, wenn dieses möglich ist.

Sind Ox, Oy, Oz drei unter sich rechtwinkliche Coordinatenaxen, und Q_x, Q_y, Q_z die Trägheitsmomente eines starren Körpers für diese Axen, sind x, y, z die Coordinaten eines Massenelementes dm des Körpers, so ist

$$Q_x = \int (y^2 + z^2)\, dm; \quad Q_y = \int (z^2 + x^2)\, dm;$$

$$Q_z = \int (x^2 + y^2)\, dm,$$

wobei die Integrale über alle Massenelemente des Körpers auszudehnen sind.

Legt man durch den Ursprung der Coordinaten eine Gerade n, so ist das Quadrat der Entfernung der Masse dm von dieser Geraden

$$(x^2 + y^2 + z^2) \sin(r, n)^2 = r^2 \sin(r, n)^2,$$

wo r die Entfernung O, dm ist.

Nun ist

$$\cos(r,n) = \cos(r,x)\cos(n,x) + \cos(r,y)\cos(n,y) + \\ + \cos(r,z)\cos(n,z), \text{ woraus}$$

$$\sin(r,n)^2 = 1 - \cos(r,x)^2\cos(n,x)^2 - \cos(r,y)^2\cos(n,y)^2 - \\ - \cos(r,z)^2\cos(n,z)^2 \\ - 2\cos(r,x)\cos(r,y)\cos(n,x)\cos(n,y) \\ - 2\cos(r,x)\cos(r,z)\cos(n,x)\cos(n,z) \\ - 2\cos(r,y)\cos(r,z)\cos(n,y)\cos(n,y) \\ = [\cos(r,y)^2 + \cos(r,z)^2]\cos(n,x)^2 \\ + [\cos(r,x)^2 + \cos(r,z)^2]\cos(n,y)^2 \\ + [\cos(r,x)^2 + \cos(r,y)^2]\cos(n,z)^2 \\ - 2\cos(r,x)\cos(r,y)\cos(n,x)\cos(n,y) \\ - 2\cos(r,x)\cos(r,z)\cos(n,x)\cos(n,z) \\ - 2\cos(r,y)\cos(r,z)\cos(n,y)\cos(n,z)$$

folgt. Substituirt man diesen Ausdruck in den obigen $r^2 \sin(r,n)^2$, so erhält man das Trägheitsmoment für die Axe n mit

$$r\cos(r,x) = x;\ r\cos(r,y) = y;\ r\cos(r,z) = z,$$

$$Q_n = Q_x \cos(n,x)^2 + Q_y \cos(n,y)^2 + Q_z \cos(n,z)^2 \\ - 2\cos(n,x)\cos(n,y)\int xy\,dm \\ - 2\cos(n,x)\cos(n,z)\int xz\,dm \qquad (a) \\ - 2\cos(n,y)\cos(n,z)\int yz\,dm.$$

Man muss also, um das Trägheitsmoment Q_n zu berechnen, neben den drei Trägheitsmomenten Q_x, Q_y und Q_z auch noch die drei Integrale $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, kennen; diese Integrale umfassen alle Massentheile des Körpers.

187. Setzt man in der Gleichung (a) der vorhergehenden Summen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}\cos(n,x);\ \mathfrak{y} = \mathfrak{n}\cos(n,y);\ \mathfrak{z} = \mathfrak{n}\cos(n,z),$$

wo $\mathfrak{n}$ eine noch unbestimmte Länge der Richtung n ist, und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, deren Projectionen auf die x, y, z Axe; setzt man dann

$$Q_n . n^2 = 1, \tag{b}$$

was erlaubt ist, da Q_n wie alle Trägheitsmomente positiv ist, so wird die Gleichung (a)

$$1 = Q_x . \mathfrak{x}^2 + Q_y . \mathfrak{y}^2 + Q_z . \mathfrak{z}^2$$
$$- 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\int xy\,dm - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\int xz\,dm - 2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\int yz\,dm.$$

In dieser Gleichung sind Q_x, Q_y, Q_z, $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$ Constanten, so lange die Coordinatenaxen dieselben bleiben, von denen überdiess die drei ersten positiv sind. Diese Gleichung ist demnach die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt, den Ursprung der Coordinaten, hat. Die Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte haben aber drei aufeinander rechtwinkliche Axen. Bezieht man die Gleichung der Fläche auf diese als Coordinatenaxen, so wird sie

$$1 = Q_a \mathfrak{x}^2 + Q_b \mathfrak{y}^2 + Q_c \mathfrak{z}^2, \tag{c}$$

wo Q_a, Q_b, Q_c die Trägheitsmomente für diese Axen sind. Für diese Axen müssen daher die Integrale Null werden oder

$$\int xy\,dm = 0; \int xz\,dm = 0; \int yz\,dm = 0.$$

Es gibt also in jedem Punkte eines Körpers drei aufeinander rechtwinkliche Axen, für welche diese drei Integrale gleich Null sind. Diese Axen nennt man die Hauptaxen in diesem Punkte, und die Trägheitsmomente für diese Hauptaxen die Hauptträgheitsmomente für diesen Punkt; die Fläche (c) ist ein Ellipsoid; es heisst das Trägheitsellipsoid für diesen Punkt. Aus ihm findet man das Trägheitsmoment für jede durch seinen Mittelpunkt gehende Axe n aus (b)

$$Q_n = \frac{1}{n^2}$$

während $n^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2$

ist. Das Trägheitsmoment für jede Richtung n ist der reciproke Werth des Quadrates des Halbmessers des Trägheitsellipsoides in der Richtung n. Die Axen des Trägheitsellipsoides sind

$$\frac{1}{\sqrt{Q_a}}, \frac{1}{\sqrt{Q_b}}, \frac{1}{\sqrt{Q_c}},$$

die reciproken Werthe der Quadratwurzeln aus den Hauptträgheitsmomenten.

188. Sind zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich

$$Q_b = Q_c,$$

so ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid; dann sind alle Trägheitsmomente für Drehaxen, welche denselben Winkel α mit der Axe a bilden, unter sich gleich und zwar

$$Q_a \cos\alpha^2 + Q_b \sin\alpha^2.$$

Für die Drehaxen, welche rechtwinklich auf a stehen, sind die Trägheitsmomente gleich Q_b.

Sind für einen Punkt alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so wird das Trägheitsellipsoid eine Kugel, alle Halbmesser einander gleich, daher auch alle Trägheitsmomente für Drehaxen durch diesen Punkt einander gleich.

Beispiele. Für die Axen, welche durch den Mittelpunkt einer homogenen Kugel gehen, deren Halbmesser r und deren Masse m ist, sind die Trägheitsmomente gleich (Nro. 162)

$$\frac{2}{5} m r^2.$$

Diese Axen sind also alle Hauptaxen, das Trägheitsellipsoid ist eine Kugel. Für jede dieser Axen müssen daher die Integrale

$$\int x y \, dm, \quad \int x z \, dm, \quad \int y z \, dm$$

Null werden, wovon man sich leicht direct überzeugt. Zu einem Elemente dm bei x, y, z ist immer ein entsprechendes bei x, —y, z, wesshalb die erste und dritte dieser Summen Null werden. Dasselbe gilt von der zweiten, weil zu x, y, z immer auch —x, y, z vorkommt.

Nimmt man den Punkt O, für welchen man die Trägheitsmomente bestimmen will, im Abstande ∂ von dem Mittelpunkte der Kugel, so ist noch immer die von O durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Axe eine Hauptaxe für den Punkt O. Nennt man diese Axe die Axe der z, so wird zu jedem Punkte x, y, z ein zweiter bei —x, y, z und ebenso zu x, y, z ein zweiter x, —y, z vorhanden sein. Es werden also für diese Axe z und für jede durch

O auf z rechtwinklich gehende Axe die drei obigen Intégrale gleich Null, jede von ihnen ist eine Hauptaxe.

Die Hauptträgheitsmomente sind

$$Q_c = \frac{2}{5} m r^2; \; Q_b = Q_a = \frac{2}{5} m r^2 + m \partial^2;$$

das Trägheitsellipsoid ist für diesen Punkt ein Rotationsellipsoid, mit der Axe der Figur z.

Für ein rechtwinkliches, homogenes Parallelepiped sind die durch den Mittelpunkt gehenden, den Kanten parallelen Axen die Hauptaxen des Mittelpunktes, wovon man sich wie oben überzeugt; die Hauptträgheitsmomente sind, wenn a, b, c die Kanten sind und m die Masse des Parallelepipeds ist

$$Q_a = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2); \; Q_b = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2); \; Q_c = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Sind die Kanten ungleich, so sind auch diese Hauptträgheitsmomente ungleich, und das Trägheitsellipsoid ist ein dreiaxiges.

189. Setzt man in der Gleichung (c) für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ wieder

$$n \cos(n, x); \quad n \cos(n, y) \text{ und } n \cos(n, z)$$

und bedenkt, dass (b)

$$Q_n . n^2 = 1$$

ist, so wird die Gleichung (c)

$$Q_n = Q_a \cos(n, a)^2 + Q_b \cos(n, b)^2 + Q_c \cos(n, c)^2, \tag{d}$$

welche Gleichung zur Berechnung von Q_n dient.

Sind n, m, l drei auf einander rechtwinkliche Richtungen, welche sich in dem Punkte schneiden, zu dem die Hauptträgheitsmomente Q_a, Q_b, Q_c gehören, so ist

$$Q_n + Q_m + Q_l = Q_a + Q_b + Q_c,$$

oder die Summe der Trägheitsmomente für drei unter sich rechtwinkliche Axen n, m, l ist eine Constante für den Durchschnittspunkt jener drei Axen, was man übrigens schon durch Addition der Trägheitsmomente

$$\int (x^2 + y^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \int (y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm$$

findet, wo r die Entfernung des Elementes dm vom Ursprunge der Coordinaten ist.

Ist die Summe der Trägheitsmomente für drei unter sich rechtwinkliche Axen, welche sich im Schwerpunkte schneiden, gleich A, so ist sie für alle Punkte, welche auf der Kugelfläche vom Halbmesser ∂ um diesen liegen gleich

$$A + 2m\partial^2,$$

wenn m die Masse des betrachteten Körpers ist.

190. Für den Mittelpunkt eines geraden rhombischen, homogenen Prismas, dessen Kanten a, b, c sind, b rechtwinklich auf a und c, während der Winkel a, c $= \alpha$ ist, findet man zunächst, dass eine Hauptaxe parallel b ist. Nennt man diese Axe die der y, so hat man zu jedem Massentheil bei x, y, z einen bei x, $-$y, z, woraus folgt, dass die beiden Integrale

$$\int xy\,dm \text{ und } \int yz\,dm,$$

in welchen y vorkommt, Null sein müssen. Die beiden andern Hauptaxen müssen daher rechtwinklich auf b, der Ebene a, c parallel sein.

Nimmt man nun die beiden Coordinatenaxen der x und z schiefwinklich, den Kanten a und c parallel, so hat man das Trägheitsmoment für die y Axe

$$Q_y = \varDelta b \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x^2 + z^2 + 2xz\cos\alpha)\sin\alpha\, dx\, dz$$

$$= \frac{1}{12} m (a^2 + c^2),$$

wo die Masse des Parallelepipeds $\varDelta abc\sin\alpha = m$ gesetzt ist.

Das Trägheitsmoment für die x Axe wird

$$Q_x = \varDelta a \sin\alpha \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (y^2 + z^2 \sin\alpha^2)\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{12} m (b^2 + c^2 \sin\alpha^2)$$

und ebenso $$Q_z = \frac{1}{12} m (b^2 + a^2 \sin \alpha^2).$$

Um die Lage der Hauptaxen zu finden, ziehe ich in der Ebene der x, z die Linie v, welche mit der Axe der x den Winkel φ bildet, und projicire das Element $\sin \alpha\, dx\, dy$ auf diese Linie; die rechtwinklichen Coordinaten dieses Elementes für die Linie v seien v und w. Dann ist die Bedingung der Hauptaxe, dass

$$\sin \alpha \int\int v\, w\, dx\, dz = 0$$

sei, wenn die Integrationen über alle Massentheile des Körpers ausgedehnt werden, wozu man obige Gleichung noch mit b zu multipliciren hätte.

Nun ist
$$v = z \cos(\alpha - \varphi) + x \cos \varphi$$
$$w = z \sin(\alpha - \varphi) - x \sin \varphi,$$

womit obige Gleichung übergeht in

$$c^2 \sin 2(\alpha - \varphi) - a^2 \sin 2\varphi = 0, \text{ woraus}$$
$$\tan 2\varphi = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{c^2 \cos 2\alpha + a^2}.$$

Hieraus ergeben sich zwei Werthe von 2φ, nämlich

$$2\varphi \text{ und } 180^\circ + 2\varphi,$$

woraus die beiden Werthe

$$\varphi \text{ und } 90 + \varphi.$$

Diess sind die Winkel, welche die beiden Hauptaxen mit der Axe der x bilden, also mit der Kante a.

Die beiden Hauptmomente, welche Q_1 und Q_2 heissen mögen, ergeben sich nun einfacher mit Hilfe der Gleichung (∂) aus den beiden Momenten Q_x und Q_z, welche eben bestimmt wurden. Man hat

$$\frac{1}{12} m (b^2 + c^2 \sin \alpha^2) = Q_1 \cos \varphi^2 + Q_2 \sin \varphi^2,$$

$$\frac{1}{12} m (b^2 + a^2 \sin \alpha^2) = Q_1 \cos(\alpha - \varphi)^2 + Q_2 \sin(\alpha - \varphi)^2$$

zu ihrer Bestimmung.

Druck eines sich um eine Axe drehenden Körpers auf die einzelnen Lager.

191. In Nro. 161 ist bereits die Summe der Gegendrücke in den beiden Fixpunkten einer Drehaxe auf einen sich drehenden Körper bestimmt durch die Gleichungen (28); jede der beiden Componenten X und Y, welche dort bestimmt sind, besteht aus der Summe zweier Drücke, welche in den beiden festgehaltenen Punkten der Drehaxe diese erleidet. Setzt man diese

$$X = X_1 + X_2 \text{ und } Y = Y_1 + Y_2$$

wobei X_1 und Y_1 dem einen dieser Punkte angehören sollen, X_2 und Y_2 dem andern, so kann man diese einzeln erhalten, wenn man die beiden Gleichungen (b) in Nro. 161, welche die Bedingungsgleichungen der Bewegung sind, so combinirt, dass man die statischen Momente der Kräfte bezüglich der x und der y Axe erhält. Dabei nehmen wir den Ursprung der Coordinaten, für welche bisher nur die Axe z festgestellt war, in dem einen der festgehaltenen Punkte, von welchem der andere um l entfernt sein soll. Hierzu bedarf man aber noch zu den beiden Gleichungen (b) einer dritten, welche anzeigt, dass die Kräfte auch in der Richtung der z Axe der relativen, oder hier der absoluten Ruhe entsprechen. Diese dritte Gleichung ist

$$f_z \, dm + h_z \, dm = 0.$$

Um die Momente der Kräfte für die y Axe zu erhalten, hat man die erste dieser Gleichungen mit der Coordinate z des Elementes zu multipliciren und davon die dritte multiplicirt mit x abzuziehen, was

$$(f_x z - f_z x) \, dm + (h_x z - h_z x) \, dm + x z \omega^2 dm + y z \frac{d\omega}{dt} dm = 0.$$

gibt.

Addirt man diese Gleichungen für alle Massentheile dm des Körpers, so erhält man im ersten Gliede die Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte, welche an dem Körper thätig sind für die y Axe; diese sei M_y.

Die Summe der zweiten Glieder gibt die Summe der statischen

Momente der Drücke, welche von einem Elemente auf das andere ausgeübt werden; da diese je paarweise gleich und entgegengesetzt vorkommen, und diese überdiess in eine gerade Linie fallen, so ist die Summe ihrer statischen Momente Null. Nur an den Fixpunkten der Drehaxe gehören nur die Momente der auf die Axe geübten Drücke hierher, während die Gegendrücke auf die Lager nicht in obige Summe eingehen, da die Lager nicht mehr dem gedrehten Körper angehören. Von diesen Momenten ist das des Druckes durch den Anfangspunkt der Coordinaten Null und es bleibt daher nur $X_2 . l$ für die Summe aller zweiten Glieder.

Hiermit erhält man

$$M_y + X_2 l + \omega^2 \int xz\,dm + \frac{d\omega}{dt} \int yz\,dm = 0,$$

und auf gleiche Weise

$$M_x - Y_2 l - \omega^2 \int yz\,dm + \frac{d\omega}{dt} \int xz\,dm = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Componenten des Drucks, welchen die Axen in dem einen Fixpunkte erleiden; die Componenten des Druckes in dem andern ergeben sich dann aus

$$X_1 = X - X_2 ; \quad Y_1 = Y - Y_2 ,$$

wobei man sich zu erinnern hat, das die X in der Ebene durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers rechtwinklich auf der Drehaxe, gegen den Schwerpunkt liegen; die Y aber in der Richtung normal zu dieser Ebene nach der Seite, nach welcher die positive Drehung gerichtet ist.

192. Ist die Drehaxe eine Hauptaxe (Nro. 187) für den Ursprung der Coordinaten, so sind die Integrale Null oder

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int yz\,dm = 0,$$

und in diesem Falle sind die Drücke auf die Axe oder umgekehrt auf das Lager in der Entfernung l

$$X_2 = -\frac{M_y}{l} \text{ und } Y_2 = \frac{M_x}{l}$$

unabhängig von der Bewegung, wogegen die in dem Ursprunge der Coordinaten werden

$$X_1 = -P_x - m\partial\omega^2 + \frac{M_y}{l},$$

$$Y_1 = -P_y + m\partial\frac{d\omega}{dt} - \frac{M_x}{l}.$$

Wirken keine äusseren Kräfte auf den Körper, so hat man

$$X_2 = Y_2 = 0;$$

der zweite Fixpunkt erleidet keinen Druck, er kann also auch frei gelassen werden; geht die Drehaxe, indem sie eine Hauptaxe bleibt, auch noch durch den Schwerpunkt, so erleidet sie bei der Drehung gar keinen Druck, sie kann also ganz frei gelassen werden, und eine solche Drehaxe heisst desshalb auch eine freie Axe.

193. Geschieht ein Stoss auf den Körper, welcher um die z Axe drehbar ist, so ist, wenn dieser Stoss rechtwinklich auf die Ebene durch die Drehaxe und den Schwerpunkt erfolgt, die Summe der Drücke auf die Lager parallel zu der Richtung des Stosses (Nro. 171)

$$Y = N - m\partial\frac{Nn}{Q_z} = N - m\partial\frac{d\omega}{dt}.$$

Diese vertheilen sich auf die einzelnen Lager so, dass

$$Y_2 l = N l_1 + \omega^2\int yz\,dm - \frac{d\omega}{dt}\int xz\,dm,$$

wo l_1 die Coordinate z für die Kraft N ist.

Verlegt man den Ursprung der Coordinaten, so dass die x, y Ebene durch die Richtung des Stosses geht, setzt man also

$$z = l_1 + z' \text{ und } l = l_1 + l_2$$

so wird die zweite dieser Gleichungen, weil die z′, x Ebene durch den Schwerpunkt geht

$$Y_2 l_1 + Y_2 l_2 = N l_1 + \omega^2\int yz'\,dm - m l_1\partial\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\int xz'\,dm.$$

Zieht man hiervon die erste Gleichung ab, nachdem man sie mit l_1 multiplicirt hat, so erhält man

$$Y_2 l_2 - Y_1 l_1 = \omega^2\int yz'\,dm - \frac{d\omega}{dt}\int xz'\,dm,$$

welches die Momentengleichung für die jetzige Axe der x ist. Soll nun die Axe keinen Stoss erleiden, so müssen unabhängig von ω^2 und von $\frac{d\omega}{dt}$ die Werthe von Y_2 und von Y_1 gleich Null werden. Dazu gehört, dass neben der in (Nro. 171) aufgestellten Bedingung noch die weitere erfüllt sein muss, dass die Integrale

$$\int y z' dm \text{ und } \int x z' dm$$

Null werden, dass also die Drehaxe für den Punkt, in welchem sie von der auf ihr normalen Ebene durch die Stossrichtung getroffen wird, eine Hauptaxe sei.

194. Ein schwerer Thorflügel dreht sich um eine verticale Axe; die Drücke auf die beiden Angeln, welche ihn halten, zu bestimmen.

Den Thorflügel nehme ich der Einfachheit wegen rechteckig parallelepipedisch und homogen an; c sei seine Länge in der Richtung der Drehaxe, b in der Richtung von der Drehaxe durch den Schwerpunkt des Flügels und a rechtwinklich darauf. Die Drehaxe halbire die Kante a. Die Masse des Thors sei m.

Das Trägheitsmoment des Thors für die Drehaxe ist

$$Q_z = \frac{1}{12} m . (b^2 + a^2) + m . \frac{b^2}{4} = \frac{1}{12} m (4 b^2 + a^2).$$

Wird der Thorflügel durch die constante Kraft Pg an dem Hebelsarme p gedreht, so wird die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{12 P p}{m (4 b^2 + a^2)} \cdot g$$

und nach dem Satze von der Arbeit der Kraft, wenn man annimmt, das Thor gehe von der Ruhe aus

$$\frac{1}{24} m (4 b^2 + a^2) \omega^2 = P p g \alpha,$$

wenn α der durch Bogen gemessene Drehungswinkel ist.

Hierbei erleiden die Angeln einen Druck (Nro. 161, Gl. 28)

$$X = m \partial \omega^2 = \frac{12 P b p \alpha}{4 b^2 + a^2} \cdot g \cdot$$

Wirkt die Kraft Pg an dem Hebelsarme b, ist a sehr klein gegen 2b, so wird diess nahe

$$X = 3P\alpha . g,$$

oder die Summe der Drücke auf die beiden Angeln in der Richtung der Horizontalen durch die Drehaxe gegen den Schwerpunkt ist so gross, wie der Druck eines schweren Körpers von der Masse $3P\alpha$.

Rechtwinklich auf die Richtung der Bewegung und nach derselben Seite hin erleiden die Angeln Drücke, deren Summe

$$Y = Pg - m\frac{b}{2}\frac{d\omega}{dt} = Pg\left(1 - \frac{6pb}{4b^2 + \alpha^2}\right)$$

ist, was für $p = b$ und a sehr klein gegen b in

$$-\tfrac{1}{2}Pg$$

übergeht.

Um noch die Drücke auf die einzelnen Angeln kennen zu lernen, muss deren Lage gegeben sein. Sie seien um $\frac{l_1}{2}$ über und unter dem Schwerpunkte angebracht.

Nimmt man die x Axe horizontal parallel der Kante b durch den Schwerpunkt, z vertical abwärts in der Drehaxe und y rechtwinklich auf beide nach der Seite der Kraft Pg, so ist klar, dass die x Axe eine Hauptaxe ist; denn zu jedem $x, +z$ gehört ein gleich grosses $x, -z$ und ebenso für y; es müssen also

$$\int xz\,dm = 0 \text{ und } \int xy\,dm = 0$$

sein. Aber ebenso muss auch

$$\int yz\,dm = 0$$

sein, weil zu jedem x, y ein Element dm bei einem gleich grossen positiven und negativen z vorkommt. Die Axen sind daher Hauptaxen, und die Bestimmung der Drücke auf die beiden Angeln ergibt sich aus

$$\frac{X_1 l_1}{2} - \frac{X_2 l_1}{2} + mg\frac{b}{2} = 0,$$

wo X_1 der Druck auf die untere Angel ist. Diess gibt

$$X_1 = -\tfrac{1}{2}mg\frac{b}{l_1} + \tfrac{1}{2}X,$$

$$X_2 = +\tfrac{1}{2}mg\frac{b}{l_1} + \tfrac{1}{2}X.$$

Geht die Kraft Pp durch die Axe der x, so wird

$$Y_1 - Y_2 = 0,$$

daher $$Y_1 = +\frac{1}{2}Y \text{ und } Y_2 = +\frac{1}{2}Y$$

oder für die oben angegebenen Verhältnisse

$$Y_1 = -\frac{1}{4}Pg \text{ und } Y_2 = -\frac{1}{4}Pg.$$

Jede der beiden Angeln erleidet daher einen Druck der Kraft Pg entgegen, welcher gleich dem Drucke einer schweren Masse $\frac{1}{4}P$ ist.

Hält man den bewegten Thorflügel in einem Punkte auf, welcher in der halben Höhe des Thors liegt und dessen Entfernung n von der Drehaxe durch

$$n = \frac{Qz}{m\partial} = \frac{1}{6}\,\frac{4b^2 + a^2}{b},$$

oder wenn a sehr klein gegen b ist, durch

$$\frac{2}{3}b$$

gegeben ist, so erleiden die Angeln keinen Stoss durch das plötzliche Aufhalten, vorausgesetzt, dass diess normal zur Ebene y, z geschehe. Geschieht dagegen das plötzliche Anhalten des Thorflügels in der Entfernung b von der Drehaxe, also am äussern Ende des Thorflügels, übrigens in gleicher Höhe, so erleiden die beiden Angeln einen Stoss, welcher gleich für jede

$$\frac{1}{2}N\left(1 - \frac{6b^2}{4b^2 + a^2}\right)$$

ist und also für sehr kleine a gleich

$$-\frac{1}{4}N.$$

Der Druck geschieht in der Richtung der bisherigen Bewegung, da N dem entgegen, also negativ sein muss. Der ganze Antrieb, welchen eine Angel erleidet, bis der Thorflügel zur Ruhe gebracht ist, ist

$$-\frac{1}{4}\int N\,dt = +\frac{1}{4}\,\frac{Q_z\omega}{b},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stosse ist (Nro. 170 g).

Die freie Bewegung eines starren Körpers.

195. Betrachtet man ein Massenelement dm des starren Körpers, auf welches eine Kraft fdm, welche ihren Sitz ausserhalb des Körpers haben soll, und desshalb eine äussere Kraft heisst, ferner die Resultirende hdm der Drücke aller übrigen Elemente des Körpers wirkt, so hat man, wenn x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten dieses Elementes zur Zeit t sind

$$
\begin{aligned}
dm\frac{d^2x}{dt^2} &= f\cos(f,x)\,dm + h\cos(h,x)\,dm,\\
dm\frac{d^2y}{dt^2} &= f\cos(f,y)\,dm + h\cos(h,y)\,dm,\\
dm\frac{d^2z}{dt^2} &= f\cos(f,z)\,dm + h\cos(h,z)\,dm.
\end{aligned}
\tag{a}
$$

Bildet man diese Gleichungen für jedes Massenelement des Körpers und addirt diese zusammen, so dass alle auf die Bewegung nach einer Richtung bezüglichen Gleichungen eine Summe bilden, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^2x}{dt^2}dm &= \Sigma P_x,\\
\int\frac{d^2y}{dt^2}dm &= \Sigma P_y,\\
\int\frac{d^2z}{dt^2}dm &= \Sigma P_z,
\end{aligned}
\tag{b}
$$

wo ΣP_x, ΣP_y, ΣP_z die Summen der Componenten aller äusseren Kräfte, welche an dem Körper wirken, bedeuten. Die Summen der inneren Drücke, wie z. B. $\int h\cos(h,x)\,dm$ werden Null, weil alle diese Drücke paarweise, gleich und direct entgegengesetzt vorhanden sein müssen.

Die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers zur Zeit t sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
m x_0 &= \int x\,dm,\\
m y_0 &= \int y\,dm,\\
m z_0 &= \int z\,dm,
\end{aligned}
$$

Leitet man diese Gleichungen zweimal nach t ab, so erhält man rechts die linken Glieder der Gleichungen (a) und hat also

$$m\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \Sigma P_x; \quad m\frac{d^2 y_0}{dt^2} = \Sigma P_y; \quad m\frac{d^2 z_0}{dt^2} = \Sigma P_z. \qquad (33)$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes nach irgend einer Richtung ist daher dieselbe wie bei einem materiellen Punkte, welcher die ganze Masse m des Körpers enthält, und auf welchen alle äusseren Kräfte, welche auf den Körper wirken, parallel zu ihren Richtungen einwirken.

Beispiel. Dreht sich ein starrer Körper um eine Axe z mit der Winkelgeschwindigkeit, welche zur Zeit t gleich ω ist; ist ∂ der Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe, so ist die Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung von ∂

$$-\partial\omega^2,$$

und rechtwinklich darauf

$$+\partial\frac{d\omega}{dt}.$$

Sind nun P_x und P_y die äusseren Kräfte, welche an diesem Körper wirken, zerlegt nach ∂ und rechtwinklich darauf; sind X und Y die Drücke des Lagers auf den Körper nach denselben Richtungen, so ist mit der Masse m des Körpers nach dem obigen Satze

$$X + P_x = -m\partial\omega^2$$

und

$$Y + P_y = m\partial\frac{d\omega}{dt},$$

woraus sich die Drücke auf die Axe wie aus den Gleichungen (28) in (Nro. 161) ergeben.

196. Wirken äussere Kräfte nicht auf den Körper, so ist somit die Bewegung des Schwerpunktes eine geradlinige und gleichförmige, oder er ist in Ruhe. Dasselbe ist der Fall, wenn sich die äusseren Kräfte auf ein Kräftepaar reduciren lassen; werden diese Kräfte parallel zu sich auf den Schwerpunkt übertragen, so geben sie dort eine Resultirende Null.

Alles, was im ersten Buche über die Bewegung eines materiellen Punktes gelehrt wurde, gilt unmittelbar von der Bewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers.

197. Sind z, r, φ die Coordinaten eines Massenelementes dm, dabei z nach einer constanten Richtung gemessen, r und φ aber Polarcoordinaten in der zu z rechtwinklichen Ebenen, so wird die zweite der Gleichungen (13 in Nro. 72) mit den Bezeichnungen der vorhergehenden Nummer

$$dm \frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = f \sin(f, z)\, p\, dm + h \sin(h, z)\, q\, dm, \tag{c}$$

wo p und q die Hebelarme der Kräfte f und h sind, also die Glieder rechts die statischen Momente der Kräfte für die Axe der z.

Bildet man diese Gleichung für jeden der Massentheile des Körpers und addirt alle diese Gleichungen, so erhält man

$$\int \frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} dm = M_z, \tag{d}$$

wo M_z die Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte für die z Axe ist.

$r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ ist die Flächengeschwindigkeit des Elementes dm, und $\frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$ die Flächenbeschleunigung. Darnach nennt man die Summen

$$\int r^2 \frac{d\varphi}{dt} dm \quad \text{und} \quad \int \frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} dm$$

die Flächengeschwindigkeit und die Flächenbeschleunigung des Körpers, und die obige Gleichung sagt damit, die Flächenbeschleunigung eines Körpers für eine beliebige Axe z ist dem statischen Momente der äussern Kraft für diese Axe gleich.

Durch jeden Punkt gibt es eine Axe, für welche das statische Moment ein Maximum ist, es gibt also auch für jeden Punkt eine Axe, für welche die Flächenbeschleunigung ein Maximum ist.

Ist das statische Moment für eine Axe constant gleich Null, so ist die Flächengeschwindigkeit für diese Axe constant.

198. Aus den Gleichungen (a) in (Nro. 195) ergibt sich

$$-h\cos(h,x)\,dm = f\cos(f,x)\,dm - \frac{d^2x}{dt^2}\,dm$$

und analoge Werthe für die andern Axen. Beachtet man, dass $f\cos(f,x)\,dm$ die auf das Element dm wirkende bewegende Kraft ist, während $\frac{d^2x}{dt^2}dm$ die Effectivkraft ist, welche sich aus der Bewegung des Elementes gibt, welche bei freier Bewegung des Elementes der ersten gleich sein müsste, so kann man die Differenz beider oder $-h\cos(h,x)\,dm$ die verlorene Kraft nennen; die Gleichungen (b) sagen dann, die Summen der verlornen Kräfte sind nach den drei Richtungen x, y, z einzeln gleich Null.

Die Gleichung (c) in (Nro. 197) gibt dann

$$-h\sin(h,x)\,q\,dm = f\sin(f,x)\,p\,dm - dm\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

das statische Moment der bei dem Elemente dm verlornen Kraft; die Gleichung (∂) und die ihr analogen für die andern Axen sagen damit, dass die statischen Momente der verlornen Kräfte an dem starren Körper für drei aufeinander rechtwinkliche Axen einzeln gleich Null sind.

Beide Sätze lassen sich endlich in dem d'Alembert'schen Principe zusammenfassen: die verlornen Kräfte müssen an dem starren Körper im Gleichgewichte sein.

199. Lässt man die Axen Ox, Oy, Oz durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, und lässt sie sich mit diesem bewegen, so dass sie immer parallel zu drei unbeweglichen Axen $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ gehen, so hat man um die relativen Bewegungen für jene drei beweglichen Axen zu erhalten, zu den äusseren Kräften der Bewegung noch die entgegengesetzten Führungskräfte der Translation des Axensystems zuzusetzen (Nro. 131). Diese sind, wenn a, b, c die Coordinaten des Schwerpunkts zur Zeit t in Beziehung zu den unbeweglichen Axen sind, für das Element dm

$$-dm\frac{d^2a}{dt^2},\quad -dm\frac{d^2b}{dt^2},\quad -dm\frac{d^2c}{dt^2} \text{ und}$$

das statische Moment derselben für die Ox Axe z. B. ist

$$-dm\frac{d^2c}{dt^2}.y+dm\frac{d^2b}{dt^2}z.$$

Bringt man diese Kräfte an allen Massentheilen des Körpers an, und addirt sie, so erhält man das Moment für die Axe Ox.

$$-\frac{d^2c}{dt^2}\int y\,dm+\frac{d^2b}{dt^2}\int z\,dm,$$

was Null ist, da die Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht, für den jedes der beiden Integrale Null ist. Dasselbe gilt für die beiden andern Axen.

Damit erhält man für die mit dem Schwerpunkte beweglichen Axen

$$\begin{aligned}\int\frac{d\left(r^2_x\frac{d\varphi_x}{dt}\right)}{dt}dm&=M_x,\\ \int\frac{d\left(r^2_y\frac{d\varphi_y}{dt}\right)}{dt}dm&=M_y,\\ \int\frac{d\left(r^2_z\frac{d\varphi_z}{dt}\right)}{dt}dm&=M_z,\end{aligned}\tag{34}$$

wo r_x, r_y, r_z der Entfernungen des Elementes dm von den Axen x, y, z bedeuten und φ_x, φ_y, φ_z die Winkel dieser Richtungen r mit unbeweglichen Ebenen, die den Axen x, y, z parallel sind.

Dieselben Gleichungen würde man erhalten, wenn der Schwerpunkt festgehalten wäre. Daher der Satz: Die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt erfolgt, als ob dieser festgehalten wäre, alle Kräfte aber unverändert an dem Körper bleiben.

Beispiel. Bei einem Körper, welcher sich um eine feste Axe z dreht, ist die Winkelbeschleunigung gegeben durch

$$Q_z\frac{d\omega}{dt}=M_z.$$

Die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt mit derselben Winkelgeschwindigkeit; um aber diese zu berechnen, hat man das Trägheitsmoment für die Axe durch den Schwerpunkt parallel zu z

$$Q_z - m\partial^2,$$

wenn m die Masse des Körpers und ∂ die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehaxe ist. Das Moment der Kräfte für die Axe durch den Schwerpunkt ist

$$M_z - Y_1 \partial,$$

wo Y_1 die Summe aller an dem Körper thätiger Kräfte, zerlegt normal auf z, ∂ ist, einschliesslich des Drucks auf die Axe (Nro. 172). Damit ergibt sich für die Bewegung um den Schwerpunkt

$$(Q_z - m\partial^2)\frac{d\omega}{dt} = M_z - Y_1 \partial,$$

was mit dem obigen übereinstimmt, wenn

$$m\partial\frac{d\omega}{dt} = Y_1$$

ist. Nennt man Y den Druck auf die Axe normal zu z, ∂ und ΣP_y die Summe der Componenten der andern Kräfte in dieser Richtung, so erhält man hieraus

$$Y = -\Sigma P_y + m\partial\frac{d\omega}{dt},$$

wie früher.

200. Setzt man die Coordinaten von dm gleich x, y, z vom Schwerpunkte aus, so kann man setzen

$$r_x \cos\varphi_x = y \text{ und } r_x \sin\varphi_x = z;$$

damit wird

$$r_x^2 \frac{d\varphi_x}{dt} = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}.$$

Setzt man ferner ω die Winkelgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe, und ω_x, ω_y, ω_z die Componenten dieser Geschwindigkeit für die drei Coordinatenaxen, so geben die Drehungen während der Zeit dt um diese Axen die Verschiebungen von dm nach

	x	y	z
$\omega_x dt$ um x	0,	$-z\omega_x dt$,	$+y\omega_x dt$,
$\omega_y dt$ um y	$+z\omega_y dt$,	0,	$-x\omega_y dt$,
$\omega_z dt$ um z	$-y\omega_z dt$,	$+x\omega_z dt$,	0;

woraus

$$\frac{dx}{dt} = z\omega_y - y\omega_z;\ \frac{dy}{dt} = x\omega_z - z\omega_x;\ \frac{dz}{dt} = y\omega_x - x\omega_y.$$

Damit wird die Flächengeschwindigkeit um die x Axe

$$r_x^2 \frac{d\varphi_x}{dt} = (y^2+z^2)\omega_x - \omega_y yx - \omega_z zx \tag{a}$$

und die Flächenbeschleunigung gleich

$$\frac{d[(y^2+z^2)\omega_x]}{dt} - \frac{d\omega_y}{dt} yz - \omega_y \left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)$$
$$- \frac{d\omega_z}{dt} zx - \omega_z \left(x\frac{dz}{dt} + z\frac{dx}{dt}\right).$$

Setzt man hier für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ in den letzten Gliedern, die obigen Werthe, und nimmt man schliesslich an, die Hauptaxe, deren Trägheitsmoment Q_a ist, falle in diesem Augenblicke mit der Axe der x zusammen, so erhält man für die Gleichung (∂) in Nro. 197

$$\frac{d(Q_a\omega_a)}{dt} + \omega_b\omega_c(Q_c - Q_b) = M_a,$$

wo Q_b und Q_c die andern Hauptträgheitsmomente und ω_a, ω_b, ω_c die Winkelgeschwindigkeiten um sie sind.

Setzt man hier noch aus (Nro. 189)

$$Q_x = Q_a \cos(a,x)^2 + Q_b \cos(b,x)^2 + Q_c \cos(c,x)^2,$$

so findet man

$$\frac{dQ_x}{dt} \text{ für } a,x = 0, \text{ gleich Null}$$

und ebenso aus (Nro. 127)

$$\omega_x = \omega_a \cos(a,x) + \omega_b \cos(b,x) + \omega_c \cos(c,x)$$

für $a, x = 0$ also $b, x = c, x = \frac{\pi}{2}$

$$\omega_x = \omega_a \text{ und } \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \omega_b \frac{d(b,x)}{dt} - \omega_c \frac{d(c,x)}{dt}.$$

Man findet aber für $(a,x) = 0$, dass eine Drehung um b den Winkel c, x um $-\omega_b dt$ ändert, und eine Drehung um c den Winkel (b,x) um $+\omega_c dt$, woraus

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt},$$

Diess gibt in obige Gleichung substituirt

$$Q_a \frac{d\omega_a}{dt} + (Q_c - Q_b)\,\omega_b\,\omega_c = M_a,$$

wozu man die analogen Gleichungen für die andern Axen

$$Q_b \frac{d\omega_b}{dt} + (Q_a - Q_c)\,\omega_a\,\omega_c = M_b, \qquad (35)$$

$$Q_c \frac{d\omega_c}{dt} + (Q_b - Q_a)\,\omega_a\,\omega_b = M_c$$

hat.

201. Die drei letzten Gleichungen lehren die Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_b, ω_c zur Zeit t um die drei Hauptaxen für den Schwerpunkt kennen. Nennt man

θ den Winkel, welchen die Axe c mit der Axe Oz bildet,

φ den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Ebene a, b und der Ebene x, y mit der Axe x bildet, von x nach y gemessen,

ψ den Winkel, welchen eben diese Durchschnittslinie mit der Hauptaxe a bildet, von dem Durchschnitte in der Richtung a, b gemessen, so bestimmen diese drei Winkel die Lage der Hauptaxen. Es durchschneiden sich nämlich die Ebenen x, y und a, b unter dem Winkel θ in der durch φ gegebenen Linie, der Knotenlinie, und die Lage der Ebene a, b ist also vollständig bekannt, wenn man noch weiss, ob der Winkel φ den aufsteigenden oder den abwärtsgehenden Knoten angibt, d. h. den bei dem die Ebene a, b über oder unter die Ebene x, y tritt. Wir nehmen immer diejenige Knotenlinie, von welcher an die Ebene a, b auf die Seite der positiven z tritt. In der Ebene a, b sind dann die Lagen von a und b durch ψ und $\frac{\pi}{2} + \psi$ gegeben.

Nennt man die Knotenlinie m, die darauf rechtwinkliche in der Ebene a, b aber n, so kann man die Drehung des Körpers zerlegen in die Drehungen um c, m und n, und hat

$$\omega_m = \omega_a \cos\psi - \omega_b \sin\psi,$$
$$\omega_n = \omega_a \sin\psi + \omega_b \cos\psi.$$

Dreht man den Körper der Reihe nach um diese Axen, so ergeben sich folgende Aenderungen der Winkel:

Drehung um	θ,	φ,	ψ,
c gleich $\omega_c dt$	0,	0,	$\omega_c dt$;
m „ $\omega_m dt$	$\omega_m dt$,	0,	0;
n „ $\omega_n dt$	0,	$+\frac{\omega_n dt}{\sin\theta}$,	$-d\varphi\cos\theta$.

Daraus erhält man

$$d\theta = (\omega_a \cos\psi - \omega_b \sin\psi)\, dt,$$
$$\sin\theta\, d\varphi = (\omega_a \sin\psi + \omega_b \cos\psi)\, dt,$$
$$d\psi = \omega_c\, dt - d\varphi\cos\theta,$$

oder

$$\omega_a\, dt = \cos\psi\, d\theta + \sin\theta \sin\psi\, d\varphi,$$
$$\omega_b\, dt = -\sin\psi\, d\theta + \sin\theta\cos\psi\, d\varphi, \qquad (36)$$
$$\omega_c\, dt = d\psi + \cos\theta\, d\varphi.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Lage der Hauptaxen, wenn die anfängliche Lage derselben zur Bestimmung der Constanten der Integration bekannt sind.

Der Satz von der Arbeit und der lebendigen Kraft.

202. Für jedes Massenelement dm, dessen Geschwindigkeit v ist, gilt der Satz

$$dm . v dv = f ds \cos(f, s)\, dm + h\, ds \cos(h, s)\, dm,$$

wo die f und h dieselbe Bedeutung haben, wie in Nro. 161. Bildet man diese Gleichungen für alle Massenelemente des Körpers und addirt sie, so werden hier die Arbeiten der Kräfte h paarweise sich aufheben, da diese Kräfte immer paarweise entgegengesetzt und an Punkten angebracht erscheinen, deren Entfernung sich nicht ändert. Man erhält daher aus obiger Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\int v^2 dm + \tfrac{1}{2}\int v^2_0\, dm = \Sigma\int P\cos(P, ds)\, ds, \qquad (37)$$

wo sich links die Integrale auf alle Massentheile des Körpers beziehen und rechts die Summe der Arbeiten der äusseren Kräfte auf dem Wege steht, auf welchem sich die Geschwindigkeit v_0 des Elementes dm in v ändert.

Man nennt die Summe der lebendigen Kräfte aller Massentheile eines Körpers die lebendige Kraft des Körpers (Nro. 164).

Damit sagt obige Gleichung: Die Zunahme der lebendigen Kraft eines Körpers ist gleich der Summe der Arbeiten aller äusseren Kräfte während dieser Bewegung.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so ist die lebendige Kraft des Körpers constant.

Man kann die lebendige Kraft eines sich drehenden Körpers durch die Hauptträgheitsmomente ausdrücken. Ist Q das Trägheitsmoment für die augenblickliche Drehaxe, und ω die Winkelgeschwindigkeit für diese, so ist

$$Q = Q_a \cos(a, \omega)^2 + Q_b \cos(b, \omega)^2 + Q_c \cos(c, \omega)^2$$

und

$$\omega_a = \omega \cos(a, \omega); \quad \omega_b = \omega \cos(b, \omega); \quad \omega_c = \omega \cos(c, \omega),$$

woraus die lebendige Kraft des Körpers

$$\frac{1}{2} Q \omega^2 = \frac{1}{2} [Q_a \omega_a^2 + Q_b \omega_b^2 + Q_c Q_c^2]. \tag{38}$$

Beispiel 1. Ein schwerer homogener Cylinder rollt über eine schiefe Ebene herunter. Die lebendige Kraft desselben anzugeben.

Die Axe des Cylinders ist hierbei horizontal, und das Rollen erfordert, dass in jedem Augenblicke die Drehung um die jedesmalige Berührungslinie des Cylinders und der schiefen Ebene erfolgt. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung, und Q das Trägheitsmoment des Cylinders für diese Berührungslinie, so ist die lebendige Kraft

$$\frac{1}{2} Q \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 + m r^2 \right) \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2,$$

wenn m die Masse des Cylinders ist. Ist nun anfänglich die Winkelgeschwindigkeit ω_0, und ω wenn der Cylinder um die verticale Tiefe h herabgerollt ist, so ist nach dem Satze von der Arbeit

$$\frac{3}{4} m r^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = m g h.$$

Für einen gleitenden Cylinder, für welchen $v_0 = r \omega_0$ und v die Endgeschwindigkeit ist, hätte man

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0{}^2) = m g h,$$

oder beim Ausgehen von der Ruhe, beim Rollen

$$r^2 \omega^2 = \frac{4}{3} g h,$$

beim Gleiten $$v^2 = 2 g h.$$

Beispiel 2. Ist der herabrollende Körper eine homogene Kugel, welche sich um eine horizontale Axe dreht, die der schiefen Ebene parallel ist, so ist ihre lebendige Kraft bei der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Halbmesser r

$$\frac{7}{10} m r^2 \omega^2,$$

und daher wie oben

$$\frac{7}{10} m r^2 (\omega^2_0 - \omega^2) = m g h.$$

Die Flächengeschwindigkeiten.

203. Sind diese für drei unter sich rechtwinkliche Axen Ox, Oy, Oz zur Zeit t

$$F_x, \quad F_y, \quad F_z,$$

so lässt sich immer ein Kräftesystem denken, das in der beliebigen Zeit t dem Körper vom Ruhezustande aus bei constant bleibenden statischen Momenten M_x, M_y, M_z obige Flächengeschwindigkeiten ertheilt, d. h. man kann immer

$$F_x = M_x t; \quad F_y = M_y t; \quad F_z = M_z t$$

setzen und daraus die drei Momente bestimmen (Nro. 197).

Diese Kräfte geben ein Maximum des statischen Momentes M, das nach Grösse und Richtung aus

$$M_x = M \cos(M, x), M_y = M \cos(M, y), M_z = M \cos(M, z)$$

als die Diagonale des Parallelepipeds über M_x, M_y und M_z bestimmt ist (Gleichung 31 in Nro. 174). Diesem Maximum des Momentes muss ein Maximum der Flächengeschwindigkeit

$$F = M t$$

entsprechen, welches hiernach ebenso durch

$$F_x = F\cos(F,x);\ F_y = F\cos(F,y);\ F_z = F\cos(F,z) \quad (39)$$

nach Grösse und Richtung bestimmt ist.

Man hat also für jede Bewegung eines Körpers in irgend einem Augenblicke eine Axe des Maximums der Flächengeschwindigkeit, und diese ist durch (39) bestimmt nach Grösse und Richtung. Sie wird im Allgemeinen in jedem Augenblicke eine andere Grösse und Richtung haben; auch wird man für jeden Augenblick nach Nro. 175 die Lage des Punktes bestimmen können, für welches dieses Maximum der Flächengeschwindigkeit den kleinsten Werth hat. Die Axe dieser Flächengeschwindigkeit hat man die Centralaxe genannt.

Sind keine bewegenden Kräfte vorhanden, so sind die Flächengeschwindigkeiten F_x, F_y, F_z constant (Nro. 197). Hier ist also die Axe des Maximums der Flächengeschwindigkeit ebenfalls von constanter Richtung und das Maximum der Flächengeschwindigkeit constant.

204. Sind Q_a, Q_b, Q_c die Hauptträgheitsmomente des Körpers für einen bestimmten Punkt, so gibt die Gleichung (a) in (Nro. 200), wenn man x nach der Reihe mit den Hauptaxen a, b, c zusammen fallen lässt, die Flächengeschwindigkeiten für diese drei Axen

$$Q_a\omega_a,\quad Q_b\omega_b,\quad Q_c\omega_c,$$

indem für die Hauptaxen die Integrale $\int yx\,dm$; $\int zx\,dm$ gleich Null werden. Damit findet man das Maximum der Flächengeschwindigkeit nach der vorhergehenden Nummer

$$F = \sqrt{(Q_a\omega_a)^2 + (Q_b\omega_b)^2 + (Q_c\omega_c)^2}$$

und die Richtung der Axe dieser Geschwindigkeit gegen die drei Hauptaxen

$$\cos(F,a) = \frac{Q_a\omega_a}{F},\quad \cos(F,b) = \frac{Q_b\omega_b}{F};\quad \cos(F,c) = \frac{Q_c\omega_c}{F}.$$

Bewegung eines Körpers, auf welchen keine Kräfte wirken.

205. Der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Die Axe des Maximums der Flächengeschwindigkeit um den Schwerpunkt hat eine constante Richtung, oder die Ebene der grössten Flächengeschwindigkeit ist unveränderlich, wie die grösste Flächengeschwindigkeit selbst. Beide lassen sich durch die Formeln der vorhergehenden Nummern bestimmen.

Die Winkel, welche die augenblickliche Drehaxe mit den Hauptaxen bildet, sind

$$\frac{\omega_a}{\omega} = \cos(\omega, a); \quad \frac{\omega_b}{\omega} = \cos(\omega, b); \quad \frac{\omega_c}{\omega} = \cos(\omega, c), \tag{a}$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit um diese Axe und die Richtung der Axe vorstellt.

Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt hat die Gleichung

$$1 = Q_a x^2 + Q_b y^2 + Q_c z^2 \tag{b}$$

bezogen auf die Hauptaxen a, b, c.

Sind x', y', z' die Coordinaten des Punktes, in welchem die augenblickliche Drehaxe dieses Ellipsoid durchdringt, und ist l die Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkt des Ellipsoides oder dem Schwerpunkte, so ist

$$\frac{x'}{l} = \frac{\omega_a}{\omega}; \quad \frac{y'}{l} = \frac{\omega_b}{\omega}; \quad \frac{z'}{l} = \frac{\omega_c}{\omega}.$$

Die tangirende Ebene an das Trägheitsellipsoid in diesem Punkte hat die Gleichung

$$Q_a x x' + Q_b y y' + Q_c z z' = 1,$$

$$Q_a \omega_a x + Q_b \omega_b y + Q_c \omega_c z = \frac{\omega}{l}, \tag{c}$$

während die Gleichung der durch den Schwerpunkt gelegten Ebene der grössten Flächengeschwindigkeit

$$Q_a \omega_a x + Q_b \omega_b y + Q_c \omega_c z = 0 \tag{d}$$

ist. Diese beiden Ebenen sind daher parallel.

Der Körper dreht sich daher zu irgend einer Zeit um eine Axe, welche der unveränderlichen Ebene der grössten Flächengeschwindigkeit conjugirt ist, diese Ebene als Diametralebene genommen. Ist diese augenblickliche Drehaxe nicht eine der Axen des Ellipsoides, der Hauptaxen des Körpers, so ändert die ihr conjugirte Diametralebene durch die Drehung ihre Lage im Raume; die

Ebene der grössten Flächengeschwindigkeit muss aber ihre Lage behalten; es wird also im nächsten Augenblicke die augenblickliche Drehaxe eine andere sein.

Ist dagegen die augenblickliche Drehaxe eine Hauptaxe des Körpers, so steht die conjugirte Diamentralebene rechtwinklich auf ihr; sie bleibt daher bei der Drehung in ihrer Lage, und die Hauptaxe bleibt Drehaxe; die Hauptaxen durch den Schwerpunkt heissen desshalb auch permanente Axen der Drehung, oder auch freie Axen (Nro. 192).

Der Satz über die lebendige Kraft (Nro. 202) sagt, dass die lebendige Kraft hier, wo keine Kräfte wirken, constant ist, oder dass

$$Q_1 \,.\, \omega^2 = \text{constant},$$

wo Q_1 das Trägheitsmoment für die augenblickliche Drehaxe ist. Aus dem Trägheitsellipsoid hat man aber (Nro. 187)

$$Q_1 = \frac{1}{l^2},$$

daher

$$\frac{\omega}{l} = \text{constant},$$

oder die Winkelgeschwindigkeit ist der Länge der augenblicklichen Drehaxe innerhalb des Trägheitsellipsoides proportional.

Nennt man F das constante Maximum der Flächengeschwindigkeit, so ist

$$F^2 = Q_a{}^2 \omega_a{}^2 + Q_b{}^2 \omega_b{}^2 + Q_c{}^2 \omega_c{}^2.$$

Damit ergibt sich die Entfernung der Ebenen (c) und (d)

$$\frac{\omega}{lF},$$

welche somit ebenfalls constant ist.

Denkt man sich eine tangirende Ebene an das Trägheitsellipsoid dort, wo dieses von der augenblicklichen Drehaxe durchschnitten wird, so ist diese immer parallel der unveränderlichen Ebene der grössten Flächengeschwindigkeit und dabei immer in gleicher Entfernung vom Schwerpunkte. Der Körper bewegt sich daher so, dass sein Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt diese feste Ebene immer berührt, und da die augenblickliche Drehaxe durch den jedesmaligen Berührungspunkt geht, so rollt das Trägheitsellipsoid über

Wirkt nur die Schwerkraft auf den Körper, so ist die Winkelgeschwindigkeit für die Axe c oder

$$\omega_c = \text{const.} \tag{a}$$

Sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten um die beiden andern Hauptaxen a und b zur Zeit t gleich ω_a und ω_b; sind diese zur Zeit 0 gleich $(\omega_a)_0$ und $(\omega_b)_0$, so gibt der Satz über die Arbeit (37 und 38 in Nro. 202) die Gleichung

$$\frac{1}{2} Q_a [\omega_a{}^2 + \omega_b{}^2 - (\omega_a)_0{}^2 - (\omega_b)_0{}^2] = m g \partial (\cos\theta_0 - \cos\theta), \tag{b}$$

wo m die Masse des Körpers bedeutet und θ und θ_0 die Neigungen der Axe c gegen die vertical aufwärts gehende z Axe zu den Zeiten t und 0 sind.

Führt man die Winkel der (Nro. 201) ein, wo φ der Winkel ist, welchen die Verticalebene c, z mit einer unveränderlichen Verticalebene bildet, und ψ der Winkel der Normalen der Ebene c, z mit der Hauptaxe a, wobei der Winkel φ in der Richtung der positiven Drehung genommen sein soll, die Normale zu c, z aber der aufsteigende Knoten, und also der in der Richtung a, b gemessene Bogen ψ von jener Normalen zuerst nach der Seite der positiven z aufsteigt, so hat man

$$\omega_a{}^2 + \omega_b{}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin\theta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Damit wird die Gleichung (b)

$$Q_a \left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin\theta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = 2 m g \partial (\cos\theta_0 - \cos\theta) + \\ + Q_a \left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0^2 + \sin\theta_0{}^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2\right]. \tag{c}$$

Sind anfänglich $\frac{d\theta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null, d. h. hat anfänglich die Axe c keine Bewegung, so zeigt diese Gleichung, dass $\cos\theta_0 - \cos\theta$ immer positiv sein muss, dass also der Schwerpunkt des Körpers in der Zeit t tiefer gesunken ist, wenn nicht $\frac{d\theta}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null sind, oder neben dem ersten $\sin\theta = 0$ ist, in welchem Falle die Axe c vertical steht und also der Schwerpunkt unterstützt ist.

Ist aber die anfängliche Drehung der Verticalebene c, z, welche $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ ist, nicht gleich Null, so kann θ kleiner werden als θ_0, der Schwerpunkt des Körpers kann aufwärts steigen.

Eine weitere Gleichung gibt die Betrachtung, dass das statische Moment der Schwerkraft für die z Axe gleich Null ist, also die Flächengeschwindigkeit für diese Axe constant sein muss. Da man Flächengeschwindigkeiten wie statische Momente und wie Kräfte zusammensetzen kann, so findet man die Flächengeschwindigkeit für die z Axe, wenn man die Flächengeschwindigkeiten um die a, b, c Axen je mit den Cosinus der Winkel (a, z), (b, z), (c, z) multiplicirt und diese Producte addirt. Diess gibt die Flächengeschwindigkeit für die z Axe

$$Q_a \omega_a \cos(a, z) + Q_b \omega_b \cos(b, z) + Q_c \omega_c \cos(c, z) =$$
$$= Q_c \omega_c \cos\theta + Q_a \sin\theta (\omega_a \sin\psi + \omega_b \cos\psi) = l,$$

wo l eine Constante ist.

Setzt man aus (36 in Nro. 201),

$$\omega_a \sin\psi + \omega_b \cos\psi = \sin\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

so wird diese Gleichung

$$Q_c \omega_c (\cos\theta_0 - \cos\theta) = Q_a \left[\sin\theta^2 \frac{d\varphi}{dt} - \sin\theta^2_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0\right]. \quad (d)$$

Hat der Körper eine anfängliche Drehung erhalten, ohne dass die Verticalebene c, z eine anfängliche Bewegung hat, ist also $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$, so wird die eintretende Drehung dieser Verticalebene immer dasselbe Zeichen haben wie

$$\omega_c (\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

und wird also mit ω_c gleich gerichtet sein, wenn der Schwerpunkt sinkt, dagegen dem entgegen, wenn der Schwerpunkt durch eine anfängliche Bewegung der Axe c aufwärts steigt. Hat die Axe c keine anfängliche Bewegung, so fängt der Schwerpunkt an zu sinken, und diess veranlasst eine Drehung der Verticalebene c, z in dem Sinne, in welchem der Körper um die c Axe rotirt, rechts oder links, wenn diese Rotation rechts oder links ist.

Die dritte der Gleichungen (36 in Nro. 201) ist

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_c - \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}.$$

$\frac{d\psi}{dt}$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Linie a, welche mit dem Körper fest verbunden ist, von der Normalen auf c, z, der Linie des aufsteigenden Knotens entfernt. Diese ist, wie man sieht, wenn die Axe c keine anfängliche Bewegung erhalten hat, und also ω_c und $\frac{d\varphi}{dt}$ einerlei Zeichen haben, wenn θ ein spitzer Winkel ist, kleiner als ω_c, grösser, wenn θ ein stumpfer Winkel ist. Die Knotenlinie trifft daher nach und nach Punkte in der Ebene a, b, welche in der Richtung der Drehung ω_c liegen, wenn der Schwerpunkt des Körpers oberhalb O liegt; oder Punkte, welche in der entgegengesetzten Richtung der Drehung ω_c liegen, wenn der Schwerpunkt des Körpers unterhalb des Fixpunktes O liegt. Im ersten Falle sagt man, die Bewegung der Knotenlinie in der Ebene a, b sei direct, im zweiten retrograd.

210. Ist θ constant, so ist aus (d)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{constant},$$

d. h. die Verticalebene c, z dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Um den Werth dieser Geschwindigkeit zu bestimmen, ist aus (36 in Nro. 201)

$$\omega_a = \sin\theta \sin\psi \frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega_b = \sin\theta \cos\psi \frac{d\varphi}{dt},$$

und

$$\frac{d\omega_a}{dt} = \sin\theta \cos\psi \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \omega_b \frac{d\psi}{dt}.$$

Substituirt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (35 in Nro. 200), wo

$$M_a = mg\partial \sin\theta \cos\psi$$

ist, so erhält man

$$Q_a \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{d\psi}{dt} - \omega_c\right) + Q_c \omega_c \frac{d\varphi}{dt} = mg\partial,$$

wobei aber Q_a das Trägheitsmoment für den Schwerpunkt bedeutet, da die Gleichungen (35) sich auf diesen beziehen. Diess gibt mit

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_c - \cos\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$Q_a \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - Q_c \omega_c \frac{d\varphi}{dt} = -mg\partial. \qquad \text{(e)}$$

Man erhält hieraus

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Q_c \omega_c}{2 Q_a \cos\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{Q_c \omega_c}{2 Q_a \cos\theta}\right)^2 - \frac{mg\partial}{Q_a \cos\theta}} \qquad \text{(f)}$$

als die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Verticalebene c, z drehen muss, wenn die Neigung θ gleich (c, z) erhalten bleiben soll.

Man sieht, dass zwei solcher Winkelgeschwindigkeiten immer möglich sind, wenn $\cos\theta$ negativ ist, also der Schwerpunkt unterhalb des Fixpunktes liegt; dass aber, wenn der Schwerpunkt über dem Fixpunkte liegt, eine bestimmte Drehgeschwindigkeit ω_c nothwendig ist, um die Axe c in constanter Neigung gegen die Verticale z zu erhalten. Ist θ ein rechter Winkel und also die Axe c horizontal, so gibt die Gleichung (e) unmittelbar

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mg\partial}{Q_c \omega_c}.$$

Diese Drehgeschwindigkeit der Verticalebene wird daher um so kleiner, je grösser die Drehgeschwindigkeit ω_c ist.

Ist ω_c sehr gross, so gibt für jeden Winkel θ die Gleichung f die beiden Näherungswerthe

$$\frac{Q_c \omega_c}{Q_a \cos\theta} \quad \text{und} \quad \frac{mg\partial}{Q_c \omega_c}.$$

Die letzte dieser Drehungen ist die, welche man an dem Kreisel, dem Bohnenberger'schen Maschienchen, dem Gyroscope etc. beobachtet.

211. Man kann sich das aus der Trägheit der rotirenden Masse ergebende Moment, welches bei dieser Bewegung dem Momente der Schwerkraft entgegenwirkt und so die Erhaltung des Winkels θ bedingt, leicht anschaulich machen, wozu ich der Einfachheit wegen $\theta = \frac{\pi}{2}$ setze.

Betrachtet man eine Scheibe des rotirenden Körpers, welche normal auf der Hauptaxe c steht, und in dieser ein Massenelement d m, dessen Lage durch seine Entfernung von der Axe c gleich r, und den Winkel χ, welchen r mit dem horizontalen Halbmesser der Scheibe bildet, gegeben ist; so wird dieses Element vermöge der Rotation um die Axe c in der Zeit d t um $\omega_c\, dt$ fortgeführt, so dass der Winkel χ gleich $\chi + \omega_c\, dt$ wird. Durch die Drehung der Ebene c, z um die Verticale z würde dieses Element vermöge der Beharrung in der Zeit d t um

$$-\frac{d\varphi}{dt} r \cos\chi\, dt$$

aus der Ebene r, χ zur Zeit t parallel mit c heraustreten; da es aber fest mit der Scheibe verbunden ist, so kommt es in dieser Richtung nur durch den Weg

$$-\frac{d\varphi}{dt} r \cos(\chi + \omega_c\, dt)\, dt,$$

und erleidet daher in der Richtung von c eine Verschiebung d s, welche die Differenz dieser beiden Wege ist, oder wenn man die höheren unendlich Kleinen vernachlässigt

$$ds = \frac{d\varphi}{dt} \omega_c\, r \sin\chi\, dt^2.$$

Diese Verschiebung in der Zeit d t zu bewirken, erfordert eine Kraft in der Richtung von c gleich

$$dm \cdot \frac{2\, ds}{dt^2} = 2\,\omega_c \frac{d\varphi}{dt} r \sin\chi\, dm$$

und mit derselben Kraft drückt daher das Element d m an der Scheibe der Richtung c entgegen.

Man sieht, diese Kräfte haben für alle Elemente d m entgegengesetzte Zeichen für χ zwischen 0 und π und für χ zwischen π und 2π.

Das statische Moment dieser Kräfte für die verticale Axe wird Null, dagegen hat man für die horizontale Axe, welche rechtwinklich auf c steht, die Summe der Momente

$$-2\,\omega_c \frac{d\varphi}{dt} \int r^2 \sin\chi^2\, dm = -Q_c\, \omega_c \frac{d\varphi}{dt},$$

weil das Trägheitsmoment einer Scheibe für die auf ihr normale Axe gleich der Summe der Trägheitsmomente für die in der Scheibe sich rechtwinklich kreuzenden Axen ist.

Soll die Axe horizontal bleiben, so muss dieses Moment und das statische Moment des Gewichtes zusammen Null sein, oder

$$-Q_c \omega_c \frac{d\varphi}{dt} + mg\partial = 0,$$

welches wieder die Gleichung (h) ist.

Man sieht auch leicht aus dieser Darstellung, dass eine dem ω_c gleich gerichtete Drehung um die Verticale, welche grösser als

$$\frac{mg\partial}{Q_c \omega_c}$$

ist, ein statisches Moment hervorruft, welches den Schwerpunkt erhebt, während eine dem ω_c entgegengesetzte Drehung der Verticalebene c, z das Sinken des Schwerpunktes nur beschleunigen kann.

212. Die augenblickliche Drehaxe bei dieser Bewegung liegt in der Ebene c, z; bildet sie mit der Verticalen den Winkel α, so ergibt sich ihre Lage durch Berechnung der Geschwindigkeit in ihr, welche Null sein muss. Man findet so

$$\frac{d\varphi}{dt} \sin\alpha = \omega_c \sin(\theta - \alpha), \text{ woraus}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_c \sin\theta}{\frac{d\varphi}{dt} + \omega_c \cos\theta}.$$

Die Bewegung kann immer betrachtet werden, als rolle ein mit dem Körper fest verbundener Kegel von der Oeffnung $\theta - \alpha$ auf einem unbeweglichen Kegel von der Oeffnung α.

213. Die Dauer einer ganzen Umdrehung der Verticalebene c, z ist

$$\frac{2\pi}{\pm \frac{d\varphi}{dt}},$$

wo der Nenner immer positiv zu nehmen ist. Für sehr kleine Werthe von ω_c erhält man den genäherten Werth aus (e)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{-\frac{m g \partial}{Q_a \cos\theta}} = \pm \sqrt{-\frac{g}{l\cos\theta}},$$

wo

$$l = \sqrt{\frac{m g \partial}{Q a}}$$

und die Umlaufszeit

$$2\pi \sqrt{-\frac{l\cos\theta}{g}}$$

gleich der eines conischen Pendels von der Länge l, das einen Kegel von der Oeffnung θ beschreibt, welches ein stumpfer Winkel sein muss. Setzt man den genäherten Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$ in das zweite Glied der Gleichung (e), indem man zugleich θ_1 für $\pi - \theta$ setzt, so erhält man einen genaueren Werth

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_1} \mp \frac{Q_c\,\omega_c}{Q_a \cos\theta_1} \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_1}}},$$

welcher zeigt, dass die Umlaufszeit grösser oder kleiner wird als die für das einfache conische Pendel, je nachdem das physische Pendel in der Richtung des Umlaufs oder dem entgegen rotirt, wobei aber zu beachten ist, dass wir die Axe der z vertical aufwärts genommen haben und darnach das Zeichen von $\frac{d\varphi}{dt}$ zu beurtheilen ist.

Drittes Buch.

Kräfte an einem Systeme von Massen.

Gleichgewicht eines Massensystems.

214. In (Nro. 29) ist gezeigt, dass Kräfte an einem einzelnen Punkte im Gleichgewichte sind, wenn sie für jede Verschiebung dieses Punktes die Arbeit Null geben; in (Nro. 32) ist dann gezeigt, dass Gleichgewicht stattfindet, wenn für drei nicht in einer Ebene liegende Verschiebungen die Arbeiten gleich Null sind. Diese Verschiebungen nimmt man dabei unendlich klein, um von den Aenderungen in den Richtungen der Kräfte und in ihren Grössen, welche durch die Verschiebungen hervorgebracht werden, unabhängig zu sein.

Sind in n Punkten n Massen vorhanden, welche gegenseitig auf einander durch Kräfte wirken, und auf welche noch beliebige Kräfte, welche ausserhalb dieses Systems ihren Ursprung haben, einwirken, so wird jede dieser n Massen im Gleichgewichte sein, wenn für jede nachgewiesen ist, dass für drei nicht in einer Ebene liegende, unendlich kleine Verschiebungen dieser Masse die Summe der Arbeiten aller sie angreifenden Kräfte Null ist, was also 3n Bedingungen des Gleichgewichts geben würde.

215. Sind zwei dieser Punkte durch ihre Verbindung gezwungen, in gleicher Entfernung von einander zu bleiben, so reduciren sich die Bedingungen des Gleichgewichts für diese beiden Punkte von sechs auf fünf. Die willkührlichen Verschiebungen lassen sich hier auf fünf zurückführen. Heisst der eine Punkt A, der andere B, sind X, Y, Z die Componenten der Kräfte in A nach drei auf

einander rechtwinklichen Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz; ebenso X', Y', Z' die Componenten in dem andern Punkte B; sind x, y, z die Coordinaten von A; x', y', z' die Coordinaten von B; δx, δy, δz die Projectionen der Verschiebung von A und $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ die Projectionen der Verschiebung von B, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z' = 0. \qquad (a)$$

Dazu ist

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = l^2 = \text{constant};$$

daraus

$$(x'-x)(\delta x' - \delta x) + (y'-y)(\delta y' - \delta y) + (z'-z)(\delta z' - \delta z) = 0,$$

woraus z. B.

$$(z'-z)\delta z = (x'-x)(\delta x' - \delta x) + (y'-y)(\delta y' - \delta y) + (z'-z)\delta z'.$$

Von den sechs Verschiebungen der Punkte A und B sind daher nur noch fünf willkührlich und die sechste durch die fünf andern und die Länge der Linie bestimmt. Damit zerfällt die Gleichung (a) in die fünf Gleichungen

$$X - \frac{x'-x}{z'-z}Z = 0;\ Y - \frac{y'-y}{z'-z}Z = 0;$$

$$X' + \frac{x'-x}{z'-z}Z = 0;\ Y' + \frac{y'-y}{z'-z}Z = 0 \text{ und } Z' + Z = 0,$$

oder

$$X + X' = 0;\ Y + Y' = 0;\ Z + Z' = 0 \text{ und}$$

$$(z'-z)X - (x'-x)Z = 0;\ (z'-z)Y - (y'-y)Z = 0.$$

Die ersten drei dieser Bedingungen sagen, dass die Resultirende der in A wirksamen Kräfte gleich und entgegengesetzt der Resultirenden in B ist, und die beiden letzten sagen, dass diese Resultirenden in die Richtung der Linie AB fallen. Die Resultirenden an beiden Enden der Linie AB sind also gleich gross und direct entgegengesetzt, sie sind also im Gleichgewichte.

Es findet also hier Gleichgewicht statt, wenn für jede der fünf zulässigen Verschiebungen die Summe der Arbeiten der Kräfte gleich Null ist.

216. Tritt zu den beiden Punkten ein dritter mit diesen starr verbundener, so sind von den neun willkührlichen Verschiebungen,

auf welche sich jede Verschiebung dreier einzelner Punkte zurückführen lässt, drei wegen der gegebenen Verbindungen durch die andern bestimmt, und es bleiben also nur sechs solche Verschiebungen willkührlich. Tritt ein vierter Punkt zu diesen dreien, welcher mit ihnen die Ecken eines starren Tetraeders bildet, so kann dieser nicht verschoben werden, ohne die drei Eckpunkte der Basis zu verschieben, und jede Verschiebung dieser gibt auch eine bestimmte und nicht mehr willkührliche Verschiebung der Spitze. Die Zahl der willkührlichen Verschiebungen bleibt daher sechs, und das Gleiche findet statt, wenn noch mehr Punkte starr mit diesen Vieren verbunden werden. Sind daher die Arbeiten der an den Punkten eines starren Systems wirkenden Kräfte für sechs von einander unabhängige Verschiebungen des Systems Null, so sind sie diess auch für jede Verschiebung, welche dieses System zulässt.

In (Nro. 129) ist gezeigt, dass man jede solche Verschiebung auf drei Translationen nach drei willkührlich gewählten Coordinatenaxen und auf drei Drehungen um diese zurückführen kann. Man erhält mit den Bestimmungen der genannten Nummer die Bedingung, dass die Summe der Arbeiten für diese Bewegung Null sein soll, wenn X, Y, Z die Componenten der am Punkte x, y, z wirksamen Kräfte sind und mit δx, δy, δz die Verschiebungen nach den drei Coordinatenaxen bezeichnet werden, mit $\delta\omega$ aber die Drehung um eine willkührlich gewählte Axe ω,

$$\delta x \Sigma X + \delta y \Sigma Y + \delta z \Sigma Z + \delta\omega \cos(\omega, x) \Sigma(Zy - Yz) +$$
$$+ \delta\omega \cos(\omega, y) \Sigma(Xz - Zx) + \delta\omega \cos(\omega, z) \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

welche Gleichung wegen der Willkührlichkeit von δx, δy, δz, $\delta\omega$ und der Neigung von ω in die sechs Gleichungen

$$\Sigma X = 0;\ \Sigma Y = 0;\ \Sigma Z = 0;$$
$$\Sigma(Zy - Yz) = 0;\ \Sigma(Xz - Zx) = 0;\ \Sigma(Yx - Xy) = 0$$

zerfällt. Diese sechs Gleichungen sind aber die sechs bekannten Bedingungen des Gleichgewichtes der Kräfte an einem starren Körper.

Diese sechs Bedingungen, und nur sie, sind demnach in dem Satze gegeben: Kräfte sind an einem starren Körper im Gleichgewichte, wenn die Summe ihrer Arbeiten für jede bei dem starren Systeme zulässige Verschiebung Null ist.

217. Ist ein Punkt gezwungen in einer Linie oder einer Fläche zu bleiben, so genügt nach (Nro. 94) für das Gleichgewicht, wenn die Summe der Arbeiten aller, an dem Punkte thätiger Kräfte für jede durch die Linie oder Fläche zulässige Verschiebung des Punktes Null oder negativ wird. Dabei hat man die Widerstände der Bahn normal auf diese nicht zu beachten, wohl aber einen etwa vorhandenen tangentiellen Widerstand, wobei aber für die gleichförmige Bewegung die Summe der Arbeiten Null werden muss.

Dasselbe findet statt, wenn zwei feste Körper gezwungen sind, sich so übereinander zu bewegen, dass sie sich an einer Stelle berühren. Die normalen Drücke zwischen beiden geben bei der Verschiebung, welche diese Verbindung erlaubt, Arbeiten, welche gleich gross, aber entgegengesetzt sind, also aus der Summe der Arbeiten verschwinden, während eine etwa vorhandene, tangentielle Kraft, wie Reibung, eine negative Arbeit gibt, wenn die beiden Wege an den beiden Körpern verschieden sind, was bei Gleiten der Körper übereinander der Fall ist. Sind die Kräfte an beiden Körpern im Gleichgewichte, so wird für jeden einzelnen bei einer zulässigen Verschiebung die Summe der Arbeiten aller an ihm wirkenden Kräfte gleich Null oder negativ sein, wenn man die an der Berührungsstelle auftretenden Drücke, so weit sie diesen Körper angreifen, mit in Betracht zieht. Für die entsprechende Bewegung des zweiten Körpers erhält man ebenso die Summe der Arbeiten aller Kräfte gleich Null oder negativ. Für die Summe der Arbeiten der Kräfte an beiden Körpern wird man daher bei der für beide zulässigen Verschiebung entweder Null oder eine negative Grösse erhalten, und das letzte nur, wenn Reibung oder ein anderer tangentieller Widerstand an der Berührungsstelle vorhanden ist und durch ihn der Ruhezustand bedingt ist.

Bei diesen beiden Körpern sind auch Verschiebungen möglich, durch welche die Körper auseinander gebracht werden.

Ist zuerst δn die Verschiebung in der Richtung des Normaldrucks zwischen beiden Körpern, so ist für den ersten die Bedingung des Gleichgewichts, wenn beide Körper in Berührung bleiben

$$\mathfrak{A}\,\delta n + N\,\delta n = 0,$$

wo $\mathfrak{A}\,\delta n$ die negative Arbeit der an diesem Körper thätigen Kräfte

ohne den Normaldruck N ist, wenn von Reibung abgesehen wird. Für den zweiten hat man dann

$$\mathfrak{A}'\delta n - N\delta n = 0,$$

wo $\mathfrak{A}'\delta n$ die Arbeit der an diesem Körper thätigen Kräfte ist, welche also positiv sein muss. Aus beiden Gleichungen folgt

$$\mathfrak{A}\delta n + \mathfrak{A}'\delta n = 0. \qquad \text{(a)}$$

Sollen nun die Körper ausser Berührung kommen, so muss die Verschiebung des Berührungspunktes beim zweiten Körper auf die Richtung von N projicirt, kleiner sein als δn, die Verschiebung des ursprünglichen Berührungspunktes beim ersten Körper, ebenfalls in der Richtung von N genommen. Daraus folgt aber, dass die Summe der Arbeiten

$$\mathfrak{A}\delta n + \mathfrak{A}'\delta n' \qquad \text{(b)}$$

nun negativ sein muss, da das erste negative Glied dasselbe ist, wie in der Gleichung (a), das zweite positive aber kleiner als dort.

218. Sind Kräfte an einem Systeme nicht im Gleichgewichte, so kann die Summe ihrer Arbeiten für eine unendlich kleine Verschiebung, welche sie vom Ruhezustande des Systems aus hervorbringen, nur positiv sein, und muss grösser als Null sein.

Macht man jeden einzelnen Massenpunkt des Systems frei, indem man an ihm die auf ihn wirkenden Kräfte lässt, und die Verbindungen durch die aus ihnen entspringenden Kräfte ersetzt, so wird jeder dieser Punkte in der Richtung der Resultirenden aller dieser Kräfte sich zu bewegen anfangen; die Arbeit dieser Resultirenden wird also jedenfalls positiv sein, und folglich auch die Summe der Arbeiten der bewegenden und der aus den Verbindungen entspringenden Kräfte am ganzen Systeme. Die Summe der Arbeiten der Kräfte, welche aus den Verbindungen entspringen, kann aber nur Null oder negativ sein, weil sie sich entweder paarweise aufheben, oder weil sie von Bewegungswiderständen, wie Reibung, der Bewegung immer entgegen, nur negative Arbeit zu liefern im Stande sind. Es muss also die Summe der Arbeiten der bewegenden Kräfte positiv, und wenn sie nicht im Gleichgewichte sind, also Bewegung hervorrufen, grösser als Null sein.

219. Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, dass **Kräfte an einem Systeme von Massen im Gleichgewichte sind,**

wenn sie für jede bei diesem Systeme mögliche, unendlich kleine Verschiebung eine Arbeit geben, welche Null oder negativ ist.

Diess ist der Satz, welchen man gewöhnlich unter dem Satze von den virtuellen Geschwindigkeiten versteht. Man nennt nämlich die bei dem Systeme möglichen, unendlich kleinen Verschiebungen der einzelnen Punkte die virtuellen Geschwindigkeiten derselben, und das Produkt aus der auf den Punkt wirkenden Kraft in die Projection der virtuellen Geschwindigkeit auf die Richtung der Kraft, also was wir die Arbeit der Kraft genannt haben, das virtuelle Moment; und drückt damit den obigen Satz so aus: Kräfte sind an einem Systeme im Gleichgewichte, wenn für alle Systeme von virtuellen Geschwindigkeiten die Summe der virtuellen Momente gleich Null oder negativ ist.

Der obige Satz darf aber nicht umgekehrt werden, indem Ruhe vorhanden sein kann, ohne dass für alle zulässigen Verschiebungen die Summe der Arbeiten Null oder negativ ist (vergl. Nro. 94).

220. Sind Kräfte an einem Systeme von Massen im Gleichgewichte, so sind sie diess auch noch, wenn man die Massen in der Gleichgewichtslage zu einem starren Systeme verbindet.

Unter den virtuellen Bewegungen des Systems werden auch die des starren Systemes sein; für diese sind also die Bedingungen des Gleichgewichtes erfüllt, was der obige Satz sagt.

Aufgaben über das Gleichgewicht eines Massensystems.

221. Eine schwere starre Linie von der Länge l, dem Gewichte P ist gezwungen, mit ihren Endpunkten in zwei Geraden AB und AC zu bleiben, welche in einer Verticalebene liegen, und mit der Verticalen aufwärts zu beiden Seiten die Winkel α und β bilden. Die Gleichgewichtslage der schweren Linie anzugeben.

Bleibt die Linie in AB und AC, und ist ihre Lage BC, so kann eine Verschiebung des Punktes B nur in der Linie AB er-

folgen; die Linie dreht sich daher dabei um einen Punkt, welcher in der Normalen BD zu AB liegt. Ebenso kann die Verschiebung der Linie nur eine Drehung um einen Punkt der Normalen zu AC in C oder der Linie CE sein, oder wenn sich diese beiden Normalen in dem Punkte F durchschneiden, ist eine unendlich kleine Verschiebung der Linie BC eine Drehung um F. Verbindet man den Punkt F mit dem Schwerpunkte G der schweren Linie, so beschreibt dieser Schwerpunkt bei der unendlich kleinen Drehung ein Kreiselement, dessen Mittelpunkt in F liegt; soll das virtuelle Moment bei dieser Verschiebung oder die Arbeit der Kraft P Null werden, so muss dieses Kreiselement horizontal sein; also ist fürs Gleichgewicht der Linie nothwendig, dass die Linie FG vertical ist.

Das virtuelle Moment muss hier Null werden, weil die Drehung um F nach beiden Seiten geschehen kann; erhält man nach der einen Seite hin das virtuelle Moment oder die Arbeit der Kraft P negativ, so ist es bei der Drehung nach der entgegengesetzten Seite positiv, und Gleichgewicht nicht vorhanden.

Findet bei dem Gleiten der Linie BC über die beiden Leitlinien Reibung statt, so wird man diese beiden Leitlinien wegnehmen, und statt ihrer in den beiden Endpunkten B und C die Normaldrücke N und N_1 nebst den daraus entspringenden Reibungen μN und μN_1 anbringen. Die mit dem Systeme verträgliche Verschiebung ist nur ein Gleiten der Punkte B und C in den Leitlinien, welche für B aufwärts eine andere Bedingung als für B abwärts gibt. Jede dieser Verschiebungen gibt für die Summe der Arbeiten gleich Null einen andern Werth von φ, und in Ruhe kann die Linie für alle zwischen liegende Werthe von φ bleiben; für die zwischen jenen Grenzen liegenden Werthe von φ wird die Summe der Arbeiten negativ. Um aber die in diese Ausdrücke eingehenden Werthe von N und N_1 zu bestimmen, muss man noch weitere Gleichungen haben, und diese erhält man am einfachsten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes für einen starren Körper, welche sich hier, wo nur Kräfte in einer Ebene vorkommen, auf drei reduciren, welche N, N_1 und den Winkel φ bestimmen.

222. Eine starre Platte liegt in den Endpunkten eines horizontalen Rechteckes auf vier Federn, welche die Platte vertical heben; auf der Platte liegt ein Gewicht P. Den Druck auf jede der vier Federn zu bestimmen unter der Voraussetzung, dass diese vier Federn gleich stark sind, das heisst, durch gleiche Drücke um gleichviel zusammengedrückt werden.

Ist die Länge jeder der Federn im nicht zusammengedrückten Zustande z_0, und ist eine auf die Länge z zusammengedrückt, so sei der Druck, welcher dieser Feder in diesem Zustande das Gleichgewicht hält

$$\alpha \frac{z_0 - z}{z_0} = \alpha\left(1 - \frac{z}{z_0}\right).$$

Sind dann z_1, z_2, z_3, z_4 die Längen, auf welche die vier Federn durch das Gewicht P zusammengedrückt werden, so sind

$$\alpha\left(1 - \frac{z_1}{z_0}\right);\ \alpha\left(1 - \frac{z_2}{z_0}\right);\ \alpha\left(1 - \frac{z_3}{z_0}\right);\ \alpha\left(1 - \frac{z_4}{z_0}\right)$$

die Kräfte, mit welchen die Federn die Platte vertical aufwärts drücken, welche mit dem Gewichte P auf der Platte im Gleichgewicht sein sollen.

Sind die horizontalen und verticalen Coordinaten der vier Auflagepunkte der Platte

$$\begin{aligned} -a,\ -b;\ z_1, \\ +a,\ -b;\ z_2, \\ -a,\ +b;\ z_3, \\ +a,\ +b;\ z_4, \end{aligned}$$

und die Coordinaten des Punktes, in welchem das Gewicht P wirkt

$$x,\ y,\ z,$$

so sind die Bedingungen, dass diese fünf Punkte in einer Ebene liegen

$$z_2 + z_3 = z_1 + z_4, \tag{a}$$

$$(z_1 - z_2)\frac{x}{a} + (z_1 - z_3)\frac{y}{b} + 2z = z_2 + z_3. \tag{b}$$

Bezeichnet man die verticalen Verschiebungen der vier Auflagepunkte, welche mit den ihnen entgegengesetzten allein zulässig sind, mit

$$\delta z_1, \ \delta z_2, \ \delta z_3, \ \delta z_4,$$

und die dabei eintretende Verschiebung des Gewichtes P mit δz, so geben die beiden Gleichungen (a) und (b) für diese Verschiebungen die beiden Bedingungen

$$\delta z_4 = -\delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3, \tag{c}$$

$$\delta z = -\frac{1}{2}\delta z_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + \frac{1}{2}\delta z_2 \left(1 + \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\delta z_3 \left(1 + \frac{y}{b}\right). \tag{d}$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung ist, da hier nur umkehrbare Bewegungen vorkommen, also die Arbeit Null sein muss,

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_0}\right)\delta z_1 + \left(1 - \frac{z_2}{z_0}\right)\delta z_2 + \left(1 - \frac{z_3}{z_0}\right)\delta z_3 +$$
$$+ \left(1 - \frac{z_4}{z_0}\right)\delta z_4 - \frac{P}{\alpha}\delta z = 0,$$

und diese zerfällt, nachdem man für δz_4 und δz die Werthe aus (c) und (d) eingeführt hat, wegen der Unabhängigkeit der Verschiebungen δz_1, δz_2, δz_3 in folgende drei Gleichungen

$$\delta z_1 \left[1 - \frac{z_1}{z_0} - \left(1 + \frac{z_1 - z_2 - z_3}{z_0}\right) + \frac{P}{2\alpha}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right] = 0 \text{ oder}$$

$$-2z_1 + z_2 + z_3 + \frac{P z_0}{2\alpha}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \text{ und}$$

$$2z_0 + z_1 - 2z_2 - z_3 - \frac{P z_0}{2\alpha}\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0,$$

$$2z_0 + z_1 - z_2 - 2z_3 - \frac{P z_0}{2\alpha}\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

aus welchen man findet

$$z_1 = z_0 - \frac{P z_0}{4\alpha}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

$$z_2 = z_0 - \frac{P z_0}{4\alpha}\left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

$$z_3 = z_0 - \frac{P z_0}{4\alpha}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

$$z_4 = z_0 - \frac{P z_0}{4\alpha}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Daraus ergeben sich die vier Drücke auf die Federn der Reihe nach

$$\frac{P}{4}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right);\ \frac{P}{4}\left(1+\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right);$$
$$\frac{P}{4}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right);\ \frac{P}{4}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

223. Eine schwere biegsame Linie ist mit ihren beiden Endpunkten unveränderlich befestigt, die Bedingungen ihres Gleichgewichts anzugeben.

Wirkt, wie hier vorausgesetzt ist, nur die Schwerkraft auf die Linie, so wird diese ihre Gleichgewichtslage in der Verticalebene durch die beiden Aufhängepunkte nehmen.

Ist ds ein Element der Länge der Linie, und Δds die Masse in diesem Elemente, so ist $g\Delta ds$ das Gewicht dieses Elementes und wenn δz die verticale Componente der Verschiebung dieses Elementes ist,

$$g\Delta ds\delta z$$

die Arbeit der Schwere für diese Verschiebung.

Der Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten sagt dann, dass Gleichgewicht vorhanden sei, wenn

$$g\int \Delta ds\delta z \overline{\overline{<}} 0 \tag{a}$$

ist für jedes System von virtuellen Geschwindigkeiten, welches die schwere Linie zulässt, wobei das Integral über sämmtliche Elemente der Linie auszudehnen ist.

Ist die Gleichung der schweren Linie im Gleichgewichtszustande

$$f_{x,z}=0,$$

wo x horizontal und z vertical abwärts gemessen sein soll; ist die Gleichung, nachdem man die virtuellen Verschiebungen angebracht hat

$$f_{x+\delta x,\, z+\delta z}=0,$$

wozu die Bedingung gehört, dass die Länge der Linie unverändert bei dieser Verschiebung bleibt, was dadurch ausgedrückt werden kann, dass ds unverändert bleibt; ist z_0 die Ordinate des Schwerpunktes der Linie im Gleichgewichte und $z_0+\delta z_0$ nach der Verschiebung: so ist, wenn m die Masse der ganzen Linie ist,

$$\int z \Delta \, ds = m z_0$$

und

$$\int (z + \delta z) \Delta \, ds = m(z_0 + \delta z_0),$$

woraus durch Subtraction

$$\int \delta z \Delta \, ds = m \delta z_0 .$$

Die obige Bedingung des Gleichgewichts sagt also, dass für jede Verschiebung, welche die Linie zulässt, die Verschiebung des Schwerpunktes vertical abwärts entweder Null oder negativ sein müsse, dass also durch keine Veränderung der krummen Linie der Schwerpunkt der Linie tiefer hinab gebracht werden könne, dass also die Linie im Gleichgewichtszustande die ist, bei welcher der Schwerpunkt die tiefste Lage hat.

Die weitere Bestimmung der Kettenlinie folgt hier.

Die Kettenlinie.

224. Ein biegsamer Faden ist schwer und an zwei Punkten befestigt; die einzelnen Theile des Fadens sind überdiess mit Gewichten belastet. Die Form dieses Fadens in der Gleichgewichtslage und die Spannungen in ihm anzugeben.

Der Faden wird im Gleichgewichtszustande in der Verticalebene durch die beiden Aufhängepunkte A und B hängen. In dieser Ebene nehmen wir die beiden Coordinatenaxen O x horizontal und O z vertical aufwärts, den Ursprung der Coordinaten in irgend einem Punkte des Fadens.

Schneidet man den Faden in O und in einem andern Punkte M durch, welcher die Coordinaten x, z hat, so wird zur Erhaltung des Gleichgewichtes nothwendig sein, dass man in O und in M Kräfte anbringt, welche denen gleich sind, welche die abgeschnittenen Stücke des Fadens auf das Stück OM ausüben. Das weggenommene Fadenstück kann aber z. B. in O nur eine Bewegung von O in der Richtung des anliegenden Fadenstücks verhindert haben, eine darauf rechtwinkliche nicht, da der Faden absolut biegsam gedacht wird; es wird daher die in O anzubringende Kraft in

der Richtung der Tangente an die Kettenlinie in O liegen müssen, die in M anzubringende ebenso in der Richtung der Tangente an die Kettenlinie in M.

Ist q_0 der Querschnitt des Fadens in O und $q_0 S_0$ die in O anzubringende Kraft, so nennt man S_0 die Spannung des Fadens in O; sie bezieht sich daher auf die Flächeneinheit.

Ebenso sei q der Querschnitt des Fadens im M und S die Spannung dort, das heisst qS die in M für das weggeschnittene Stück anzubringende Kraft.

Sind ferner φ_0 und φ die Winkel, welche die Tangenten an die Kettenlinie in O und M mit der Axe Ox bilden, diese Winkel nach oben gemessen, so erfordert das Gleichgewicht des Stücks OM

$$q_0 S_0 \cos\varphi_0 = q S \cos\varphi \tag{a}$$

und

$$q_0 S_0 \sin\varphi_0 = q S \sin\varphi - g\int_0^s \varDelta q\, ds, \tag{b}$$

wobei in dem letzten Gliede ds ein Längenelement des Fadens, $q\,ds$ dessen Volum, $g\varDelta q\,ds$ das Gewicht dieses Elementes sammt der darauf etwa ruhenden Last bedeutet, und das Integral über die ganze Länge des Stückes OM auszudehnen ist.

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass die horizontale Componente des Zugs in irgend einem Querschnitte immer dieselbe sei. Diesen horizontalen Zug bezeichnen wir mit H.

Die zweite Gleichung zeigt, dass der Verticalzug des Fadens nach oben zunimmt, um das Gewicht, das zwischen dem Ausgangspunkte O und dem betrachteten Punkte M liegt.

Differentiirt man die beiden Gleichungen nach φ, so erhält man

$$0 = d(qS)\cos\varphi - qS\sin\varphi\, d\varphi$$

und

$$0 = d(qS)\sin\varphi + qS\cos\varphi\, d\varphi - g\varDelta q\, ds,$$

wobei ds die Länge des Elementes ist, für welches sich der Neigungswinkel der Kette aus φ in $\varphi + d\varphi$ ändert.

Substituirt man den Werth von $d(qS)$ aus der ersten dieser Gleichungen in die zweite, und bedenkt man, dass für den Krümmungshalbmesser ϱ der Kettenlinie bei M

$$\varrho \, d\varphi = ds$$

ist, so erhält man

$$S = g \Delta \varrho \cos\varphi . \tag{c}$$

Die Spannung in irgend einem Punkte ist daher gleich dem Gewichte eines Stückes, das die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers zur Länge, die Flächeneinheit zum Querschnitt und auf die Längeneinheit so belastet ist, wie die Längeneinheit der Kette im Punkte M für die Flächeneinheit. Die Spannung ist daher um so grösser, je grösser der Krümmungshalbmesser ist, und je kleiner dabei der Winkel φ ist. Sollte ein Stück der Kette gerade werden, so müsste dazu die Spannung unendlich gross werden, wenn dieses Stück nicht vertical herab hängt, in welchem Falle $\cos\varphi = 0$ würde und die Gleichung (c) keine Bedeutung mehr hätte. Damit ein Stück der Kette vertical wird, muss aus (a) der constante Horizontalzug gleich Null sein, was wieder bedingt, dass $\cos\varphi$ überall gleich Null ist, d. h. die Kette frei vertical herabhängt. In jedem andern Falle kommt in der Kettenlinie keine verticale Tangente vor.

Aus (a) und (c) erhält man noch

$$H = q S \cos\varphi = g \Delta q \varrho \cos\varphi^2, \tag{d}$$

welche Gleichung man als die allgemeine Gleichung der Kettenlinie betrachten kann. Um sie in den rechtwinklichen Coordinaten x und z auszudrücken, sei

$$\frac{dz}{dx} = \tan\varphi = p,$$

womit

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} \text{ und } \cos\varphi^2 = \frac{1}{1+p^2} \text{ wird,}$$

daher

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\Delta g q}{H}$$

oder

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{g}{H} \int_0^x \Delta q \, dx,$$

wenn man voraussetzt, es sei $p = 0$ für $x = 0$ oder der Ursprung der Coordinaten sei ein Scheitel der Kettenlinie.

Bezeichnet man

$$\int_0^x \varDelta q\, dx \text{ durch } X,$$

so wird

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{gX}{H}}$$

und

$$\frac{1}{p + \sqrt{1 + p^2}} = e^{-\frac{gX}{H}}.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{gX}{H}} - e^{-\frac{gX}{H}}\right), \tag{f}$$

was erst weiter ausgeführt werden kann, wenn $\varDelta q$ gegeben ist.

Die gemeine Kettenlinie.

225. Hier ist der Querschnitt und die Belastung auf die Längeneinheit constant; daher

$$X = \int_0^x \varDelta q\, dx = \varDelta q x.$$

Damit findet man

$$z = \frac{1}{2} \frac{H}{\varDelta g q}\left[e^{\frac{\varDelta g q x}{H}} + e^{-\frac{\varDelta g q x}{H}}\right] - \frac{H}{\varDelta g q}, \tag{h}$$

wo die Constante der Integration durch $z = 0$ für $x = 0$ bestimmt ist.

Aus (b) erhält man wegen $\varphi_0 = 0$

$$q S \sin\varphi = \varDelta g q s,$$

was mit (a) gibt

$$H \tan\varphi = \varDelta g q s \tag{k}$$

und

$$q^2 S^2 = H^2 + (\varDelta g q s)^2. \tag{l}$$

Setzt man in (k) für $\tan\varphi$ den Werth von p aus (f) und leitet nach x ab, so erhält man

$$\varDelta g q \frac{ds}{dx} = \frac{g\varDelta q}{z}\left[e^{\frac{\varDelta g q x}{H}} + e^{-\frac{\varDelta g q x}{H}}\right]$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\varDelta g q z}{H} + 1$$

und mit $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi}$ aus (a)

$$S = \frac{H}{q\cos\varphi} = \varDelta g z + \frac{H}{q} \text{ oder } S = \frac{\varDelta g z}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}. \quad \text{(m)}$$

Die Spannung ist am kleinsten im Scheitel.

Ist die Lage des einen Aufhängepunktes durch x_1 und z_1 bestimmt, und α die Neigung der Kette an diesem Aufhängepunkt, so gibt die letzte Gleichung

$$\frac{H}{q\cos\alpha} = \varDelta g z_1 + \frac{H}{q}; \; H = \varDelta g q z_1 \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

mit welcher man, wenn z_1 und α gegeben sind, H bestimmen kann. Mit diesem Werthe von H gibt dann die Gleichung (h) den Werth von x_1 und bestimmt so die Lage des Scheitels der Kettenlinie gegen den Aufhängepunkt. Die Gleichung (k) gibt dann die Länge der Kettenlinie vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel

$$s_1 = z_1 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{(n)}$$

und die grösste Spannung in der Kette wird

$$S_{max} = \frac{\varDelta g z_1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\varDelta g s_1}{\sin\alpha}. \quad \text{(p)}$$

In der Regel wird aber nicht z_1 und α gegeben sein, sondern entweder z_1 und x_1 oder x_1 und s_1.

Setzt man $\frac{\varDelta g q x_1}{H} = \zeta$, so lässt sich die Gleichung (h) in die Form bringen

$$1 + \zeta\frac{z_1}{x_1} = \frac{1}{2}\left(e^{\zeta} + e^{-\zeta}\right),$$

aus welcher Gleichung man ζ näherungsweise bestimmen kann, worauf

$$H = \frac{\varDelta g q x_1}{\zeta}.$$

bekannt ist. Mit diesem Werthe von H berechnet man den Winkel α aus

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\varDelta g q z_1}{H} + 1,$$

womit dann die Länge der Kette vom Scheitel an durch (n) gegeben ist, wie die Spannung durch (p).

Ist die halbe Länge der Kette s_1 und die halbe Weite der Aufhängung x_1 gegeben, so gibt die Gleichung (k)

$$\frac{\varDelta g q s_1}{H} = \tan\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\zeta} - e^{-\zeta}\right) \text{ oder}$$

$$2\frac{s_1}{x_1}\zeta = \left(e^{\zeta} - e^{-\zeta}\right),$$

aus welcher Gleichung man ζ und damit H bestimmt. Die vorhergehende Gleichung gibt dann den Winkel α, worauf (n) den Pfeil z_1 der Kettenlinie bestimmt.

Die Auflösung obiger Gleichung wird erleichtert, wenn man aus

$$\frac{1}{2}\left(e^{\zeta} - e^{-\zeta}\right) = \tan\alpha \tag{q}$$

zuerst

$$\frac{1}{2}\left(e^{\zeta} + e^{-\zeta}\right) = \sqrt{\tan\alpha^2 + 1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

nimmt, woraus durch Addition

$$e^{\zeta} = \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{r}$$

wird, und damit obige Gleichung

$$\cot\alpha \ln\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x_1}{s_1}. \tag{s}$$

Aus ihr ergibt sich unmittelbar α, worauf man ζ aus

$$\zeta = \ln\cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

und daraus H bestimmt.

Für den Fall, dass z_1 und x_1 gegeben sind, hat man

$$\zeta\frac{z_1}{x_1} = \frac{1}{2}\left(e^{\zeta} + e^{-\zeta}\right) - 1,$$

und daher die Gleichung

$$\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\ln\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{z_1}{x_1}$$

oder

$$\frac{\cos a}{2\sin\frac{\alpha}{2}^2}\ln\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{x}{x_1}, \tag{t}$$

woraus die Auflösung wie oben sich ergibt. Der Werth von α ist natürlich für alle ähnlichen Kettenlinien, d. h. für dasselbe Verhältniss $\frac{x_1}{z_1}$ dasselbe, damit wird auch ζ dasselbe und das Verhältniss der horizontalen Spannung zum Gewichte der Längeneinheit der Kette der halben Spannweite x_1 proportional.

Die parabolische Kettenlinie.

226. Ist die Belastung der Kette der Länge der Horizontalprojection proportional, so hat man

$$\Delta q\, ds = \Delta_0 q_0\, dx,$$

wo $\Delta_0\, q_0$ constant ist. Damit wird aus (b), wenn man wieder die Coordinaten vom Scheitel der Kettenlinie an misst

$$q\, S\sin\varphi = g\int\Delta_0\, q_0\, dx = g\,\Delta_0\, q_0\, x,$$

$$q\, S\cos\varphi = H,$$

woraus $q^2 S^2 = H^2 + (g\,\Delta_0\, q_0\, x)^2$.

Dann wird aus beiden

$$\tan\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{g\,\Delta_0\, q_0}{H}\, x$$

und daraus

$$z = \frac{g\,\Delta_0\, q_0}{2H}\, x^2, \tag{v}$$

wozu keine Constante kommt, weil $z = 0$ wird für $x = 0$.

Die Kettenlinie ist also eine Parabel mit verticaler Axe. Die Länge der Kette ergibt sich aus der Länge der Parabel.

Die Kettenlinie mit constanter Spannung.

227. Setzt man Δ als constant voraus, so wird die Gleichung (b) in Nro. 224, immer die Coordinaten vom Scheitel gezählt

und
$$\operatorname{arc\,tan} p = \frac{\varDelta g q_0}{H} x \text{ oder}$$

$$q S \sin\varphi = g \varDelta \int_0^s q\, ds \text{ und}$$

$$H = q S \cos\varphi.$$

Soll die Spannung constant sein, so muss nach der zweiten dieser Gleichungen $q \cos\varphi$ constant sein, oder es muss die Verticalprojection des Querschnittes überall dieselbe sein. Nennt man q_0 den Querschnitt im Scheitel, so ist

$$q \cos\varphi = q_0 . \tag{w}$$

Damit wird
$$q\, ds = q_0 \frac{ds}{\cos\varphi} \text{ und}$$

$$H \tan\varphi = g \varDelta q_0 \int_0^s \frac{ds}{\cos\varphi}, \tag{x}$$

woraus durch Ableitung nach s erhalten wird

$$H \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = g \varDelta q_0\, ds, \quad \text{oder daraus}$$

$$s = \frac{H}{g \varDelta q_0} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{H}{g \varDelta q_0} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{y}$$

Das Gewicht der Kette wird mit

$$\varDelta g \int_0^{s_1} q\, ds = \varDelta g q_0 \int_0^{s_1} \frac{ds}{\cos\varphi} = H \tan\alpha. \tag{z}$$

Die Gleichung der Curve findet man aus (d)

$$H = g \varDelta q_0\, \varrho \cos\varphi,$$

was also sagt, die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers ist constant. Setzt man für den Krümmungshalbmesser seinen Werth, so wird diese Gleichung

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{1 + p^2} = \frac{\varDelta g q_0}{H}$$

$$\frac{dz}{dx} = \tan \frac{\varDelta g q_0}{H} x,$$

woraus
$$z = \text{Const} - \frac{H}{\varDelta g q_0} \ln \cos \frac{\varDelta g q_0}{H} x.$$

Für $x = 0$ soll $z = 0$ werden, was die Constante gleich Null gibt. Damit lässt sich die vorstehende Gleichung schreiben

$$\cos \frac{\varDelta g q_0}{H} x = e^{-\frac{\varDelta g q_0 z}{H}},$$

welches die Gleichung dieser Kettenlinie ist.

Die Länge derselben ist schon oben durch den Winkel gegeben. Um sie durch x auszudrücken, hat man

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\tan \frac{\varDelta g q_0}{2H} x\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\cos \frac{\varDelta g q_0}{H} x},$$

woraus
$$s = \frac{H}{\varDelta g q_0} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varDelta g q_0 x}{2H}\right).$$

Aus beiden Werthen von s hat man noch

$$\varDelta g q_0 x = H \varphi,$$

womit noch
$$z = -\frac{H}{\varDelta g q_0} \ln \cos \varphi \quad \text{wird.}$$

Die Kraftfunction.

228. Ist die Zahl der Massenpunkte, welche gegeneinander verschiebbar sind, unendlich gross, und ist die Zahl der Systeme der virtuellen Verschiebungen ebenfalls unendlich gross, so geschieht die Untersuchung des Gleichgewichtes in der Regel am einfachsten dadurch, dass man einen dieser Massenpunkte, dessen Lage allgemein ausgedrückt ist, isolirt, indem man die andern Massenpunkte wegnimmt, und dafür an jenem die Kräfte anbringt,

welche von diesen auf jenen ausgehen. Zerlegt man diese Kräfte nach den drei rechtwinklichen Coordinatenaxen der x, y, z, und addirt alle auf die betrachtete Masse m nach derselben Axe wirkenden, welche Summen mX, mY, mZ sein sollen, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes für die Masse m

$$mX\,dx + mY\,dy + mZ\,dz = 0,$$

wenn man dx, dy, dz als von einander unabhängig betrachtet. Ist diese Gleichung für alle Massenpunkte erfüllt, so ist das System im Gleichgewichte.

229. X, Y, Z in der letzten Nummer werden irgendwie von der Lage der Masse m, also von deren Coordinaten x, y, z abhängen, also Functionen von x, y, z sein. Ist dabei

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

so sind X, Y, Z die Ableitungen einer Function U nach den als von einander unabhängig betrachteten x, y, z. Ist diess der Fall, so nennt man U die Kraftfunction dieses Massensystems.

Die Componente der auf m wirkenden Kraft, welche R heissen mag, nach irgend einer Richtung n findet man bekanntlich gleich

$$R\cos(R,n) = X\cos(x,n) + Y\cos(y,n) + Z\cos(z,n).$$

Nun ist aber

$$X = \frac{dU}{dx}; \quad Y = \frac{dU}{dy}; \quad Z = \frac{dU}{dz}$$

und

$$\cos(x,n) = \frac{dx}{dn}; \quad \cos(y,n) = \frac{dy}{dn}; \quad \cos(z,n) = \frac{dz}{dn},$$

wenn dx, dy, dz die Projectionen der Verschiebung dn auf die Richtungen von x, y, z sind. Damit wird

$$R\cos(R,n) = \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{dU}{dy}\cdot\frac{dy}{dn} + \frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dn} = \frac{dU}{dn}, \tag{41}$$

wenn rechts unter dU die Aenderung der Function U verstanden ist, welche sich ergibt, wenn die Masse m um dn in der Richtung n verschoben wird.

Man findet also die Componente der Kraft, welche in x, y, z auf die Masseneinheit wirkt, nach irgend einer Richtung n, wenn man die Aenderung, welche die Kraftfunction beim Fortgehen in der

Richtung n um dn erleidet, durch dieses dn dividirt, oder wenn man, wie man sich wohl ausdrückt, die Ableitung der Kraftfunction nach der Richtung von n nimmt.

230. Setzt man die Kraftfunction U, also eine Function von x, y, z gleich einer Constanten C, so erhält man die Gleichung

$$U = C$$

einer Fläche, in welcher die Kraftfunction überall dieselbe ist. Nimmt man dn in dieser Fläche, so ist, weil U hier constant ist, die Gleichung

$$R\cos(R, n) = 0,$$

woraus

$$\cos(R, n) = 0$$

folgt, wenn überhaupt eine Kraft vorhanden ist. Diese steht daher rechtwinklich auf der Fläche $U = C$, oder in dem Massensysteme sind die Kräfte, welche die einzelnen Massen, die in der Fläche $U = C$ liegen, antreiben, rechtwinklich gegen diese Fläche gerichtet. Man nennt eine solche Fläche, in welcher die Kraftfunction einen constanten Werth hat, eine Niveaufläche, was von der Betrachtung des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten hergenommen ist.

Geht man von der Niveaufläche $U = C$ zu der

$$U = C + c,$$

wo c ebenfalls eine Constante, aber eine unendlich kleine ist; nimmt man nun n normal auf die erste dieser Niveauflächen, und dn gleich dem Abstande beider an der betrachteten Stelle x, y, z der ersten, so wird, wenn man von der ersten zur zweiten Fläche übergeht

$$U + \frac{dU}{dn}dn = C + c$$

oder

$$\frac{dU}{dn}dn = c.$$

Nun wird aber die Gleichung (a) der vorhergehenden Nummer, weil R rechtwinklich auf der Niveaufläche steht, und daher entweder mit dem hier gebrauchten dn zusammen oder in dessen Verlängerung fällt, also

$$\cos(R, n) = \pm 1$$

ist

$$\pm R\,dn = c.$$

Setzt man c als positiv voraus, so wird das obere Zeichen zu nehmen sein, R fällt also mit der Richtung dn zusammen; ist c negativ, so ist das untere Zeichen zu nehmen, oder R liegt dem dn entgegen. Die Kraft R geht also immer von der Niveaufläche der kleineren Kraftfunction zu der, in welcher die Kraftfunction grösser ist; sie ist überdiess, wie man sieht, dem Abstande der beiden Niveauflächen umgekehrt proportional.

Ist die Kraft in der Niveaufläche überall endlich, so kann dn nicht Null werden, die beiden Niveauflächen können sich nicht durchschneiden.

Beispiel. Von zwei Punkten A und B gehen auf die Masse m zwei Kräfte aus, welche dem Quadrate der Entfernungen der Masse m umgekehrt proportional sind; die eine von A ausgehende ist eine abstossende Kraft, die andere von B ausgehende eine gegen B anziehende. Für gleiche Entfernungen des m von A und von B sind beide Kräfte gleich gross; oder A ist der Nordpol und B der Südpol eines idealen Magnets und m eine Masse Nordmagnetismus. Die Kraftfunction dieses Magnets anzugeben.

Legt man durch AB Ebenen, so wird für jede dieser Ebenen die Kraftfunction dieselbe sein, und man hat diese also nur in einer Ebene durch AB zu bestimmen.

Nimmt man den Ursprung der Coordinaten in der Mitte C der Linie AB und legt die Axe der x von C aus über A hin, die Axe der y rechtwinklich darauf; sind x und y die Coordinaten eines Punktes, welcher von A und B die Entfernungen r und r_1 hat; so sind die Kräfte, welche von A und B aus auf die nach x, y gebrachte Masse m gehen

$$\frac{km}{r^2} \text{ und } \frac{km}{r_1^{\,2}},$$

wo k eine Constante ist.

Zerlegt man diese Kräfte nach x und y, so erhält man, wenn 2a die Entfernung BA ist

$$\frac{km}{r^2} \cdot \frac{x-a}{r} \text{ und } -\frac{km}{r_1^{\,2}} \cdot \frac{x+a}{r_1} \text{ nach x}$$

und

$$\frac{km}{r^2} \cdot \frac{y}{r} \text{ und } -\frac{km}{r_1^{\,2}} \cdot \frac{y}{r_1}.$$

Die Summe der beiden ersten ist mit den früheren Bezeichnungen mX und die Summe der beiden letzten mY.

Mit

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \text{ und } (x+a)^2+y^2=r_1^2$$

findet man aber diese Ausdrücke

$$X=-\frac{d\frac{k}{r}}{dx}+\frac{d\frac{k}{r_1}}{dx}$$

und

$$Y=-\frac{d\frac{k}{r}}{dy}+\frac{d\frac{k}{r_1}}{dy}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Kraftfunction U, für welche

$$\frac{dU}{dx}=X \text{ und } \frac{dU}{dy}=Y$$

sein soll

$$U=-\frac{k}{r}+\frac{k}{r_1}.$$

Die Meridiancurve einer Niveaufläche ist

$$-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}=c,$$

wenn c constant ist.

Setzt man r gleich r_1, so wird $c=0$ oder die Niveaufläche, für welche die Kraftfunction gleich Null ist halbirt AB und steht darauf rechtwinklich. Auf der Seite dieser Fläche, auf welcher A liegt, ist $r<r_1$, also die Kraftfunction dort negativ, auf der andern Seite positiv.

Ist c sehr gross und negativ, so wird r sehr klein, so dass $\frac{1}{r_1}$, was hier nahe gleich $\frac{1}{2a}$ sein, muss gegen $\frac{1}{r}$ sehr klein ist. Die Meridiancurve der Niveaufläche wird nahe ein sehr kleiner, um A beschriebener Kreis. Die Kraft geht in den Punkten dieses Kreises normal auf diesen und zwar von A weg; die Masse m in einen Punkt dieses Kreises gebracht wird in der Richtung des Radius des Kreises abgestossen.

Ist c sehr gross und positiv, so erhält man ebenso nahe einen Kreis um B; die Masse m wird dort gegen B hin angezogen. Die

Durchschnittspunkte der Curven mit der Axe AB findet man für negative c in den Entfernungen

$$\sqrt{a^2 - \frac{2a}{c}} - a \text{ und } a - \frac{1}{c} - \sqrt{a^2 + \frac{1}{c^2}}$$

den ersten ausserhalb AB, den zweiten zwischen beiden.

Hat man statt der einzelnen magnetischen Masse m einen unendlich kleinen Magnet mit den Magnetismen + m und − m, so wird dieser an jeder Stelle so gerichtet, dass seine magnetische Axe auf der Niveaufläche rechtwinklich steht und zwar das + Ende gegen die Seite der grösseren c hin.

231. Gehen alle Kräfte, welche die Masse m angreifen, von Fixpunkten aus und sind alle diese Kräfte Anziehungs- oder Abstossungskräfte, welche in den Richtungen der Verbindungslinien von m mit jenen Fixpunkten liegen, und welche Functionen der Entfernungen der Masse m von jenen Fixpunkten sind, so existirt immer eine Kraftfunction, wie aus Nro. 81 hervorgeht.

Die Potentialfunction.

232. Sind die Anziehungs- und Abstossungskräfte der vorhergehenden Nummer den Quadraten der Entfernungen der auf einander einwirkenden Agentien umgekehrt proportional, so gibt man der hier immer bestehenden Kraftfunction den besondern Namen Potentialfunction mit einer Aenderung des Zeichens, wie hier noch näher bestimmt werden soll.

Ist q die Menge eines dieser Agentien in einem Punkte P, ist q' die Menge Agens derselben oder einer andern Art in einem Punkte P', ist ε die Kraft, welche von der Einheit des Agens in P' auf die Einheit des Agens in P ausgeht, positiv bei Abstossung, negativ bei Anziehung, wenn beide Agentien in der Entfernung eins von einander sind, so wird die Menge q' bei dieser Entfernung die Kraft $\varepsilon q'$ auf jede Einheit Agens der Menge q ausüben; und sie mit dieser Kraft abstossen, wenn $\varepsilon q'$ positiv ist, sie anziehen, wenn $\varepsilon q'$ negativ ist; die Menge q wird daher mit der qfachen Kraft oder mit der Kraft $\varepsilon q q'$ abgestossen. Sind die beiden Agentien aber in

der Entfernung r von einander, so ist die abstossende Kraft zwischen beiden

$$\frac{\varepsilon q q'}{r^2}$$

wobei immer, wenn ε negativ ist, unter einer negativen Abstossung eine Anziehung verstanden sein soll.

Sind nun $q', q'', q'''\ldots$ die Mengen der Agentien, welche in den Punkten vereinigt sind, deren Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z''; $x''', y''', z'''\ldots$ sind; ist q die Menge Agens in dem Punkte x, y, z, sind $r', r'', r'''\ldots$ die Entfernungen der Punkte x', y', z' etc. von x, y, z, so sind die Kräfte, welche auf das Agens q in x, y, z wirken

$$\varepsilon' \frac{q q'}{r'^2};\ \varepsilon'' \frac{q q''}{r''^2};\ \varepsilon''' \frac{q q'''}{r'''^2};\ldots$$

wo $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''\ldots$ Coefficienten sind, welche allein von der Art der Agentien, nicht aber von ihrem Orte abhängig sind, und welche dieselbe Bedeutung haben, wie ε oben.

Die Summe der Componenten dieser Kräfte in der Richtung der x ist

$$\varepsilon' \frac{q q'}{r'^2} \cdot \frac{x - x'}{r'} + \varepsilon'' \frac{q q''}{r''^2} \cdot \frac{x - x''}{r''} + \varepsilon''' \frac{q q'''}{r'''^2} \cdot \frac{x - x'''}{r'''} + \ldots,$$

wofür man wegen

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$
$$r''^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2,$$
$$\text{etc.}$$

schreiben kann

$$-q\left[\varepsilon' q' \frac{d\frac{1}{r'}}{dx} + \varepsilon'' q'' \frac{d\frac{1}{r''}}{dx} + \varepsilon''' q''' \frac{d\frac{1}{r'''}}{dx} + \ldots\right],$$

oder

$$-q \Sigma \varepsilon' q' \frac{d\frac{1}{r'}}{dx},$$

oder weil $\varepsilon' q'$ von x unabhängig ist

$$-q \Sigma \frac{d\frac{\varepsilon' q'}{r'}}{dx} = -q \frac{d \Sigma \frac{\varepsilon' q'}{r'}}{dx}.$$

Die Summe $$\Sigma \frac{\varepsilon' q'}{r'} \tag{42}$$

nennt man die **Potentialfunction** der Agentien q', q'', q''' etc. im Punkte x, y, z; bezeichnet man diese Summe mit V, so ist die auf die Einheit des Agens q im Punkte x, y, z in der Richtung von x wirkende Kraft

$$-\frac{dV}{dx}$$

und ebenso sind die Kräfte nach den Richtungen der y und z

$$-\frac{dV}{dy} \text{ und } -\frac{dV}{dz}.$$

In dem Beispiele in Nro. 230 ist

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_1}$$

die Potentialfunction der Magnetismen $+k$ und $-k$ in einem Punkte, welcher von jenen in den Entfernungen r und r_1 liegt.

Im Folgenden sollen nur gleichartige Agentien betrachtet werden, für welche ε einen constanten Werth hat.

233. Erfüllen die Agentien q', q'', q'''... einen Raum stetig, so wird man diesen in Raumelemente $d\tau$ zerlegen und die Menge des in einem solchen Raumelemente enthaltenen Agens durch

$$k\,d\tau$$

bezeichnen können, wo k die Dichte des Agens an dieser Stelle ist, d. h. die Menge desselben, welche über den Raum 1 verbreitet wäre, wenn dieser so mit Agens gleichförmig erfüllt wäre, wie diess in dem Raumelemente $d\tau$ der Fall ist. Damit wird die Summe, welche die Potentialfunction für einen Punkt P ist, durch ein Integral dargestellt werden müssen, welches ist

$$V = \int \frac{\varepsilon k\, d\tau}{r},$$

worin r die Entfernung des Raumelementes $d\tau$ von P ist. Dieses Integral ist über den ganzen mit Agens erfüllten Raum auszudehnen.

234. Liegt der Punkt P ausserhalb des stetig mit Agens erfüllten Raumes, so ist die Entfernung r für alle Elemente des zu

betrachtenden Raumes von Null verschieden, und dann hat das Integral eine bestimmte Bedeutung. Gehört aber der Punkt P diesem Raume selbst an, so werden für diè zunächst bei P liegenden Raumelemente die Werthe von r unendlich klein, und hier entsteht die Frage, ob auch jetzt noch das obige Integral einen bestimmten Werth ausdrückt.

Zu dieser Untersuchung legen wir durch den Punkt P die x Axe und bestimmen ein Raumelement $d\tau$ durch

$$l^2 \sin\theta \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

wo l die Entfernung des Raumelementes von dem Ursprunge der Coordinaten ist, θ der Winkel (l, x), und φ der Winkel der Ebene (l, x) mit einer fixen durch x gehenden Ebene. Damit wird die Entfernung r des Raumelementes $d\tau$ von dem Punkte P, dessen Coordinate x sein soll

$$r^2 = l^2 + x^2 - 2lx\cos\theta = l^2 \sin\theta^2 + (x - l\cos\theta)^2,$$

und damit die Potentialfunction

$$V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varepsilon k l^2 \sin\theta}{\sqrt{l^2 \sin\theta^2 + (x - l\cos\theta)^2}} \, dl \, d\theta \, d\varphi.$$

Die zu integrirende Function ist hier immer eine endliche, da der Zähler den Factor $l\sin\theta$ enthält, welcher niemals grösser ist als der Nenner. Es hat also die Potentialfunction immer einen bestimmten Werth, auch wenn der Punkt P, für welchen sie betrachtet wird, innerhalb des mit Agentien stetig erfüllten Raumes liegt.

235. Leitet man den vorstehenden Ausdruck der Potentialfunction nach x ab, so erhält man

$$\frac{dV}{dx} = -\int\!\!\int\!\!\int \frac{\varepsilon k l^2 \sin\theta (x - l\cos\theta)}{[l^2 \sin\theta^2 + (x - l\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

was, wenn man jetzt den Punkt P zum Ursprunge der Coordinaten nimmt, in

$$\frac{dV}{dx} = \int\!\!\int\!\!\int \varepsilon k \sin\theta \cos\theta \, dl \, d\theta \, d\varphi$$

übergeht, welches Integral wieder einen ganz bestimmten Werth hat.

Es ist aber hier

$$k l^2 \sin\theta \, dl \, d\theta \, d\varphi$$

die Menge des Agens in dem Raumelemente $d\tau$, welches von dem P um l entfernt liegt; dieses dividirt durch das Quadrat der Entfernung, l^2 und multiplicirt mit ε gibt die von diesem Raumelemente ausgehende Kraft auf das Agens 1, und mit $-\cos(l, x) = -\cos\theta$ multiplicirt endlich die nach x gerichtete Componente der Kraft, welche also auch hier noch durch

$$-\frac{dV}{dx}$$

ausgedrückt ist.

Es werden also sowohl ausserhalb des mit Agens erfüllten Raumes als innerhalb dieses die Componenten der Kraft durch die Ableitungen der Potentialfunction dargestellt.

236. Für die zweite Ableitung der Potentialfunction findet man aus

$$V = \int \frac{\varepsilon k \, d\tau}{r}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int \varepsilon k \, d\tau \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{(x - x')^2}{r^5} \right).$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0. \tag{44}$$

Diese Formel setzt voraus, dass r immer endlich bleibe; erfüllt daher das wirksame Agens einen Raum stetig, so gilt die vorstehende Gleichung nur, wenn der betrachtete Punkt ausserhalb dieses Raumes liegt. Was aus obiger Summe der zweiten Ableitungen der Potentialfunction wird, wenn der Punkt P dem Raume der Agentien selbst angehört, muss noch besonders untersucht werden.

237. Wird wie in Nro. 183 S. 182 die Potentialfunction V einer mit Masse homogen erfüllten Kugel für einen Punkt, welcher vom Mittelpunkte der Kugel um a entfernt liegt, bestimmt, so erhält man für einen Punkt ausserhalb der Kugel

$$V = \frac{\varepsilon m}{a},$$

wo m die Masse der Kugel ist.

Für einen Punkt innerhalb der Kugel findet man die Abstossung für die Masse eins gleich

$$\frac{4}{3}\varepsilon\pi\Delta a.$$

Setzt man $$a^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
so hat man für einen Punkt ausserhalb der Kugel

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\varepsilon m}{a^2} \cdot \frac{x}{a}$$

und
$$\frac{d^2V}{dx^2} = \varepsilon m\left(\frac{1}{a^3} - \frac{3x^2}{a^5}\right),$$

und analoge Ausdrücke für die Ableitungen nach y und nach z, und damit

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Für einen Punkt innerhalb der Kugel ist dagegen

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}\varepsilon\pi\Delta a \cdot \frac{x}{a},$$

und daraus
$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4}{3}\varepsilon\pi\Delta,$$

womit

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\varepsilon k\pi \tag{45}$$

wird und nicht gleich Null.

An der Kugeloberfläche werden die beiden Ausdrücke für $\frac{dV}{dx}$ einander gleich, nämlich

$$-\frac{4}{3}\varepsilon\pi\Delta x,$$

aber die Aenderung dieses Ausdrucks für die Aenderung dx von x hat zwei Werthe, je nachdem dx ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt.

238. Dieses lässt sich unmittelbar auf einen Raum übertragen, welcher gleichförmig mit einem Agens erfüllt ist. Es lässt sich dann immer um den Punkt P, für welchen man das Potential betrachtet, und von dem angenommen er liege im Innern des mit

Agens erfüllten Raumes eine Kugel beschreiben, welche diesen Punkt einschliesst, aber ganz in dem mit Agentien erfüllten Raume liegt, und dann die Potentialfunction für P in die Summe zweier andern $V_1 + V_2$ zerlegen, von welchen die erste alle Agentien ausserhalb der Kugel, die letztere dagegen alle Agentien innerhalb der Kugel umfasst. Dann ist

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2}$$

und analog für y und z. Nun gilt für V_1, weil P ausserhalb des Raumes der in V_1 zusammengefassten Agentien gilt die Gleichung (44), dagegen für V_2 die Gleichung (45) der vorhergehenden Nummern. Man hat daher, wie auch der Körper begrenzt ist, für einen Punkt im Innern des mit Agentien erfüllten Raumes

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\varepsilon k\pi.$$

239. Da allgemein die Summe der drei Ableitungen der Potentialfunction für einen Punkt ausserhalb des Raumes der wirksamen Agentien gleich Null ist, so ist es bei der vorhergehenden Ableitung ganz gleichgiltig, wie ausserhalb der Kugel, innerhalb welcher der betrachtete Punkt liegt, die Dichte des Agens vertheilt ist; diese kann dort gleichförmig oder stetig oder auch sprungweise sich ändernd sein, immer wird die obige Gleichung (44) statt finden. Dabei kann man die Kugel, welche den betrachteten Punkt P einschliesst, beliebig klein nehmen, nur muss die Kugel selbst von Agens von der constanten Dichte k erfüllt sein, wenn der oben gegebene Beweis des Satzes (Nro. 238) stichhaltig sein soll. Es entsteht nun die Frage, gilt dieser Satz noch, wenn der Punkt P in einem Raumtheile liegt, in welchem sich die Dichte des Agens stetig ändert.

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Punkte P, setzt man die Dichte an der Stelle x', y', z'

$$k + ax' + by' + cz' + \partial x'^2 + \ldots$$

wo k, a, b, c ... constant sind, so wird in dem Ausdrucke der zweiten Ableitung der Potentialfunction nach x in Nro. 236

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int \varepsilon (k + ax' + by' + \ldots)\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{(x-x')^2}{r^5}\right) d\tau$$

das erste Glied $\int \varepsilon k \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{(x-x')^2}{r^5} \right) d\tau,$

als für eine Kugel mit gleichförmig dichtem Agens erfüllt nach Nro. 237 gleich

$$-\frac{4}{3}\varepsilon k \pi.$$

In jedem der folgenden Glieder hat aber das Integral unmittelbar seine bestimmte Bedeutung, da dort unter dem Integral keine unendlich gross werdenden Glieder mehr vorkommen. Setzt man nämlich

$$d\tau = r^2 dr d\sigma,$$

wo r die Entfernung des Elementes $d\tau$ vom Ursprung der Coordinaten ist, und $d\sigma$ das Element einer um diesen Ursprung mit dem Halbmesser eins beschriebenen Kugeloberfläche, womit

$$x' = r\cos(r, x'); \quad y' = r\cos(r, y'); \quad z' = r\cos(r, z')$$

ist, so sieht man, dass nun kein Glied des Ausdrucks unter dem Integralzeichen für $r = 0$ unendlich gross wird; es ist also in den übrigen Gliedern, mit Ausnahme des ersten, die obige Form für $\frac{d^2 V}{dx^2}$ unmittelbar anwendbar. Bildet man nun die Summe

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2},$$

so geben die ersten Glieder

$$-4\varepsilon k \pi,$$

während die andern alle sich aufheben, wie auch die Vertheilung des Agens um den Punkt P ist, wenn sie nur diesem Punkte zunächst stetig ist.

240. Beispiel. Ein guter Leiter der Elektricität ist elektrisch und die Elektricität in ihm im Gleichgewichte; die Vertheilung der Elektricität im Innern des Körpers anzugeben.

Gleichnamige Elektricitäten stossen sich ab mit Kräften, welche dem Quadrate der Entfernungen der elektrischen Punkte umgekehrt proportional sind, welche also dem Potentialgesetze folgen.

Soll die Elektricität in einem guten Leiter der Elektricität im

Gleichgewichte sein, so muss für die Elektricität in jedem Punkte im Innern die Kraft, welche von aller andern Elektricität auf jene ausgeht, gleich Null sein; für die Elektricität in der Oberfläche genügt es dagegen schon, wenn diese Kraft nur normal auf die Oberfläche und nach aussen gerichtet ist.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes im Innern des Leiters, ist V die Potentialfunction aller Elektricität in dem Leiter für diesen Punkt, so sind

$$-\frac{dV}{dx}, \quad -\frac{dV}{dy}, \quad -\frac{dV}{dz}$$

die Kräfte, welche die Elektricitätsmenge 1 im Punkte x, y, z nach diesen drei Richtungen forttreiben, und welche also fürs Gleichgewicht alle drei gleich Null sein müssen. Es ist daher V constant nach x, y, z für alle Punkte im Innern des Körpers; daher ist auch

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

für alle diese Punkte; daraus folgt, dass die Dichte der Elektricität an diesen Punkten selbst Null sein muss, oder dass die vorhandene freie Elektricität nur über die Oberfläche verbreitet sein kann.

Ist nun V die Potentialfunction aller Elektricität in einem Punkte P der Oberfläche und dn eine unendlich kleine Linie in dieser Oberfläche vom Punkte P weg, so ist

$$-\frac{dV}{dn}$$

gleich Null und daher die Potentialfunction für zwei benachbarte Punkte der Oberfläche und damit für alle Punkte der Oberfläche constant. Diese Oberfläche ist also hier eine N i v e a u f l ä c h e (Nro. 230).

241. Um die Potentialfunction eines Agens zu untersuchen, das über eine Fläche verbreitet ist, betrachten wir zuerst eine Ebene, welche gleichförmig mit diesem Agens bedeckt ist. Es sei k die Menge des Agens, welches über die Flächeneinheit verbreitet ist; der Punkt P, für welchen die Potentialfunction betrachtet wird, liege in der Entfernung z von der Ebene.

Vom Fusspunkte von P in der Ebene seien ϱ und θ Polarcoordinaten eines Punktes der Ebene; damit wird die Potentialfunction

$$V = \varepsilon k \int\int \frac{\varrho \, d\theta \, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}},$$

was durch Integration nach ϱ gibt

$$V = \varepsilon k \int \sqrt{\varrho_1{}^2 + z^2} \, d\theta - \varepsilon k \int \sqrt{\varrho_0{}^2 + z^2} \, d\theta,$$

wo ϱ_1 und ϱ_0 die zu einem bestimmten Werthe von θ gehörigen Grenzwerthe von ϱ sind. Dabei ist angenommen, die Linie ϱ schneide die Grenzlinie der Ebene nur zweimal; geschieht diess mehrmal, so hat man eine Reihe solcher Glieder, wie oben ein Paar steht. Liegt der Fusspunkt von P innerhalb der mit Agens bedeckten Ebene, so ist ϱ_0 gleich Null, und das letzte Integral wird dann

$$-2 \varepsilon k \pi z.$$

Die Kraft, mit welcher die Menge eins des Agens im Punkte P von der Ebene weggetrieben wird, ist

$$-\frac{dV}{dz} = -\varepsilon k z \int \frac{d\theta}{\sqrt{\varrho_1{}^2 + z^2}} + \varepsilon k z \int \frac{d\theta}{\sqrt{\varrho_0{}^2 + z^2}}.$$

Diese Kraft wird für ein positives ε immer in der Richtung von z liegen, weil für irgend ein θ immer $\varrho_0 < \varrho_1$ ist, und also das zweite Glied grösser als das erste. Für ein unendlich kleines z wird diese Kraft, wenn z gegen ϱ_0 verschwindet, selbst unendlich klein, und für einen Punkt P in der Ebene selbst gleich Null.

Liegt aber der Fusspunkt von P in der mit Agens erfüllten Ebene selbst, so wird für ein unendlich kleines z das erste der beiden Glieder rechts noch immer verschwinden, das zweite aber nicht, und damit

$$-\frac{dV}{dz} = 2 \varepsilon k \pi,$$

also endlich. Diese Kraft ist nach der Seite hingerichtet, nach welcher man aus der Ebene heraustritt, und hat daher auf beiden Seiten der Ebene entgegengesetzte Richtungen. Geht man daher nach einer Richtung z durch die Ebene, so ist auf der Seite, auf welcher man in die Ebene eintritt, die Kraft negativ, auf der an-

dern Seite positiv gleich $2\varepsilon k\pi$, und also die Differenz beider Kräfte $4\varepsilon k\pi$, was man so bezeichnen kann

$$\left(-\frac{dV}{dz}\right)_{+0} - \left(-\frac{dV}{dz}\right)_{-0} = 4\varepsilon k\pi\,. \tag{46}$$

Der Werth von $\frac{dV}{dz}$ ändert sich sprungweise, wenn man durch den mit Agens erfüllten Theil der Ebene durchgeht; er ist auf der negativen Seite der z gleich $+2\varepsilon k\pi$, auf der positiven dagegen $-2\varepsilon k\pi$. In der Ebene hat man beide Werthe, die Kraft aber, welche dort auf das Agens wirkt, liegt jedenfalls in der Ebene, und ihre Componente normal zur Ebene ist daher Null.

142. Für die allgemeinere Untersuchung sei O, der Ursprung der Coordinaten, in dem mit Agens bedeckten Theile der Fläche genommen, die Axe der z normal in diesem Punkte zur Fläche; die Frage ist, wie verhält sich die Kraft, welche von dem Agens in der Fläche auf die in der z Axe gelegenen Punkte ausgeht, wenn man durch die Fläche selbst von einer Seite nach der andern hin fortschreitet.

Die Kraft in einem Punkte P der z Axe, sehr nahe bei O, zerlegt nach der Richtung z oder

$$-\frac{dV}{dz}$$

lässt sich jedenfalls in eine Summe zerlegen, wovon der erste Theil die Kraft ist, welche von den zunächst bei O liegenden Theilen der Fläche ausgeht, der andere aber von den Theilen, welche ausserhalb des im ersten Theile betrachteten Stückes der Fläche liegt. Nimmt man dieses Stück der Fläche beliebig klein, nur so, dass alle Entfernungen von P bis zu den Punkten des übrigen Theils der Fläche endlich sind, so wird der Theil der Potentialfunction, welcher sich auf diesen zweiten Theil der Fläche bezieht, und ebenso die Ableitung derselben nach z sich stetig mit z ändern. Man hat daher nur den Werth von $\frac{dV}{dz}$ hier zu betrachten, welcher dem zunächst bei O liegenden, beliebig kleinen Stücke der gegebenen Fläche angehört.

Ist x', y', z' ein Punkt dieses Theils der Fläche, k die Dichte

des Agens an dieser Stelle und ψ der Winkel, welchen die Normale an dieser Stelle zur Fläche mit der z Axe bildete, so ist

$$\frac{k\,dx'\,dy'}{\cos\psi}$$

die Menge des Agens in dem Elemente der Fläche, dessen Projection auf die x, y Ebene $dx'\,dy'$ ist. Nennt man r die Entfernung dieses Elementes von dem Punkte z, wo also

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + (z - z')^2$$

ist, so ist die Potentialfunction des Agens und ihre Ableitung nach z

$$V = \iint \frac{\varepsilon k\,dx'\,dy'}{r\cos\psi} \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dz} = -\iint \frac{\varepsilon k(z - z')}{r^3\cos\psi}\,dx'\,dy',$$

wobei die Integrale über das zu betrachtende kleine Stück der gegebenen Fläche auszudehnen sind.

Setzt man nun in diesem Stücke

$$\frac{k}{\cos\psi} = k_0 + a x' + b y' + \ldots.$$

wo k_0 die Dichte des Agens im Punkte O ist, so wird

$$\frac{dV}{dz} = -\varepsilon k_0 \iint \frac{z - z'}{r^3}\,dx'\,dy' - \varepsilon a \iint \frac{x'(z - z')}{r^3}\,dx'\,dy' - \text{etc.}$$

Das zweite und alle folgenden Integrale ändern sich nach dem Gesetze der Stetigkeit, wenn z sich um dz ändert, wenn auch $z = 0$, was man leicht sieht, wenn man $x' = \varrho\cos\theta$ setzt, und das Element $dx'\,dy'$ mit $\varrho\,d\theta\,d\varrho$ vertauscht und bedenkt, dass z' gegen ϱ ein Kleines zweiter Ordnung zunächst bei dem Berührungspunkte O ist. Anders aber verhält sich das erste Glied. Aus

$$\frac{d\dfrac{z - z'}{r}}{d\varrho} = -\frac{z - z'}{r^3}\varrho - \frac{\varrho^2}{r^3} \cdot \frac{dz'}{d\varrho}$$

erhält man

$$-\varepsilon k_0 \iint \frac{z - z'}{r^3}\varrho\,d\varrho\,d\theta = \varepsilon k_0 \int \left(\frac{z - z'_1}{r_1} \mp 1\right) d\theta + \varepsilon k_0 \iint \frac{\varrho^2}{r^3}\frac{dz'}{d\varphi}\,d\varrho\,d\theta$$

$$= \mp 2\varepsilon k_0 \pi + \varepsilon k_0 \int \frac{z - z'_1}{r_1}\,d\theta + \varepsilon k_0 \iint \frac{\varrho^2}{r^3}\frac{dz'}{d\varrho}\,d\varrho\,d\theta.$$

Das doppelte Zeichen im ersten Gliede hier bezieht sich darauf, dass man das obere Zeichen zu nehmen hat, wenn z positiv, das untere, wenn z negativ ist; z'_1 und r_1 sind die Werthe, welche dem z' und r für ein bestimmtes θ zukommen an der Begrenzung des kleinen Stückes der mit Agens erfüllten Fläche, welches hier betrachtet wird. Bedenkt man, dass die den nächst bei O liegenden Punkten der Fläche angehörigen Werthe von z' nahe proportional mit ϱ^2 sind, während für ein unendlich kleines z der Werth von r nahe proportional mit ϱ ist, so sieht man, dass diese Punkte nur einen unendlich kleinen Beitrag sowohl zu dem Werthe des zweiten als des dritten Gliedes geben, dass also diese Werthe in ihren endlichen Theilen nur von den Theilen abhängen können, welche in endlicher Entfernung von O wegliegen, woraus folgt, dass eine Aenderung von z um dz in ihnen nur eine unendlich kleine Aenderung geben kann. Daraus ergibt sich, dass $\frac{dV}{dz}$ beim Durchgange durch den Punkt O seinen Werth sprungweise um

$$-4\varepsilon k_0 \pi$$

ändert, wenn man von der negativen Seite der z auf die positive übergeht, wie wir diess für die Ebene bereits fanden.

In dem Beispiele in Nro. 240 war $\frac{dV}{dz}$ im Innern der geschlossenen Fläche gleich Null; auf der Aussenseite muss es daher den Werth $-4\varepsilon k_0 \pi$ haben, oder eine Menge 1 der gleichnamigen Elektricität wird in unmittelbarer Nähe der Oberfläche mit der Kraft $4\varepsilon k_0 \pi$ abgestossen, d. h. mit einer Kraft, welche der Dichte der in der Oberfläche vertheilten Elektricität an der berührten Stelle proportional ist.

Das Potential.

243. Sind die Mengen $q', q'', q'''\ldots$ desselben Agens in den Punkten $P', P'', P'''\ldots$ vereinigt, und die Mengen $q_1, q_2, q_3\ldots$ in den Punkten $P_1, P_2, P_3\ldots$, so ist die Potentialfunction der Agentien $q', q'', q'''\ldots$ in dem Punkte P_1

$$V' = \varepsilon \Sigma \frac{q'}{r'}$$

wenn r' die Entfernung $P'P_1$ bedeutet.

Die Kraft, welche auf die Menge q_1 des Agens im Punkte P_1 von den Agentien q', q'', q''' nach irgend einer Richtung dn ausgeübt wird, ist

$$-q'\frac{dV'}{dn} = -\varepsilon q_1 \frac{d\Sigma \frac{q'}{r'}}{dn} = -\varepsilon \frac{d\Sigma \frac{q_1 q'}{r'}}{dn}.$$

Berechnet man ebenso die Kräfte, welche auf q_2, q_3 ... in der Richtung dn ausgeübt wird, so erhält man ihre Summe gleich

$$-\varepsilon \frac{d\Sigma\Sigma \frac{q_1 q'}{r}}{dn}$$

wo die Doppelsumme auf alle Combinationen der Agentien q', q'', q'''... und der Agentien q_1, q_2, q_3 ... auszudehnen ist, und das jedesmalige r die Entfernung der combinirten Agentien bedeutet.

Diese Doppelsumme mit ε multiplicirt, welche der Kürze wegen durch ein Summenzeichen vorgestellt sein soll, heisst das Potential des Systems der q', q'', q'''... auf das System q_1, q_2, q_3... oder wenn wir dieses Potential mit W' bezeichnen

$$W' = \varepsilon \Sigma \frac{q' q_1}{r}. \tag{47}$$

Man sieht, dass man denselben Ausdruck für das Potential der Agentien q_1, q_2, q_3 ... auf q', q'', q'''... erhält.

Führt man die Potentialfunction ein, so kann man auch schreiben

$$W' = \Sigma q_1 V',$$

oder wenn man

$$V_1 = \varepsilon \Sigma \frac{q_1}{r}$$

bezeichnet

$$W' = \Sigma q' V_1,$$

woraus

$$\Sigma q_1 V' = \Sigma q' V_1 \tag{48}$$

folgt.

Sind Räume stetig mit Agentien erfüllt, so zerlegt man diese in Raumelemente, und wenn man die Menge des Agens in dem Elemente des einen Raumes mit dq', die Menge in einem Elemente des andern Raumes mit dq_1 bezeichnet und mit r die Entfernung

dieser beiden Raumelemente, so ist das Potential des Agens in einem Raume auf das des andern

$$W' = \varepsilon \int\int \frac{dq' dq_1}{r} \cdot = \int V' dq_1 = \int V_1 dq'. \qquad (49)$$

244. Betrachtet man die Wirkung der Agentien desselben Systems auf sich selbst, so wird man ebenso zu dem Potentiale des Systems auf sich selbst geführt, welches ist

$$W = \varepsilon \Sigma \frac{q q'}{r}, \qquad (50)$$

wo q und q' die Mengen der Agentien in zwei Punkten eines Systems sind, welche Punkte in der Entfernung r von einander liegen, und wo die Summe alle Combinationen der in diesem Systeme vorkommenden Agentien zu zwei umfasst.

Erfüllen die Agentien einen Raum stetig, so hat man

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \int\int \frac{dq\, dq'}{r}, \qquad (51)$$

wo die Integration zweimal über denselben Raum auszuführen ist; da man aber hierbei neben der Verbindung $dq\,dq'$ auch $dq'\,dq$ erhält, so hat man das Resultat zu halbiren.

Ist V die Potentialfunction dieses Agens in einem seiner Punkte, so ist

$$W = \frac{1}{2} \int V dq. \qquad (52)$$

Bei den Combinationen der Elemente, welche bei der Integration sich ergeben, kommt auch die eines Elementes mit sich selbst vor, wobei r gleich Null wird. Wir wissen aber, dass in diesem Falle die Potentialfunction sich in die Form (Nro. 234 mit $x = 0$)

$$V = \int\int\int \varepsilon k l \sin\theta\, dl\, d\theta\, d\varphi$$

bringen lässt, in welcher l die Entfernung des Raumelementes von dem Punkte ist, für welchen die Potentialfunction gilt. Beschreibt man um diesen Punkt eine Kugel mit unendlich kleinem Radius, so wird das Agens, was innerhalb dieser Kugel liegt, zu dem Werthe von V nur unendlich wenig beitragen, und also auch der Theil von W, welcher die zunächst liegenden oder sich deckenden Elemente

enthält nur unendlich wenig zu W beitragen, so dass es gleichgiltig ist, ob man die Combination dqdq bei der Berechnung des Potentials berücksichtigt oder nicht.

245. Aufgabe. Auf einer Kugelfläche vom Halbmesser R ist ein Agens, z. B. positive Elektricität mit gleichförmiger Dichte verbreitet; im Innern und ausserhalb dieser Kugelflächen ist von demselben Agens irgend wie vertheilt. Das Potential dieses Agens auf das in der Kugeloberfläche vertheilte zu bestimmen.

Ist k die constante Dichte des Agens in der Kugeloberfläche, so ist die daraus entspringende Potentialfunction V im Innern der Kugel constant,

$$V = 4\varepsilon k\pi R,$$

wie man aus Nro. 183 entnehmen kann.

Ebenso findet man für jeden Punkt ausserhalb der Kugel, welcher in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel liegt

$$V_\sigma = \frac{4\varepsilon k\pi R^2}{r}$$

oder ebenso gross, wie die Potentialfunction einer Menge Agens $4k\pi R^2$, welche von dem Mittelpunkte der Kugel um r entfernt ist, in diesem Mittelpunkte.

Damit wird das Potential einer im Innern der Kugel vorhandenen Menge Agens, welche q heissen soll, auf das über die Kugeloberfläche verbreitete Agens

$$\int V\,dq = 4\varepsilon k\pi R q.$$

Für das ausserhalb der Kugel verbreitete Agens q_1 ist dagegen das Potential auf das Agens in der Kugelfläche

$$\int V_0\,dq_1 = 4\varepsilon k\pi R^2 \int \frac{dq_1}{r} = 4k\pi R^2 V_1,$$

wenn man mit V_1 die Potentialfunction des Agens q_1 im Mittelpunkte der Kugel bezeichnet.

Damit ist endlich das Potential des sowohl ausserhalb als innerhalb der Kugel angehäuften Agens auf das gleichförmig auf der Kugeloberfläche verbreitete Agens

$$4k\pi[\varepsilon R q + R^2 V_1].$$

Bezeichnet man jetzt mit V die Potentialfunction der Massen q und q_1 in einem Elemente ds der Kugeloberfläche, so ist

$$\int V\,ds = 4\pi[\varepsilon R q + R^2 V_1],$$

wo das Integral links über die ganze Kugeloberfläche auszudehnen ist.

246. Aus dem Resultate der vorhergehenden Nummer ergeben sich noch einige einfache Folgerungen für die Potentialfunction. Ist die Potentialfunction eines irgend wie vertheilten Agens ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes constant in einem Theile A dieses Raumes $= a$, so kann sie in einem andern Theile B dieses zusammenhängenden Raumes nicht von a verschieden sein

Construirt man eine Kugel, deren Mittelpunkt in A liegt, und welche in den Raum B hinübergreift, übrigens aber ganz in dem von Agentien leeren Raum liegt, was immer möglich ist, wenn A und B unmittelbar an einander grenzen; ist R der Halbmesser dieser Kugel, so ist nach der vorhergehenden Aufgabe für diese Kugel

$$\int V\,ds = 4\pi R^2 V_1 = 4\pi R^2 a.$$

Aber

$$\int (V-a)\,ds = \int V\,ds - a\int ds = 4\pi R^2 a - a.4\pi R^2 = 0.$$

Nun soll aber in dem Theile A des betrachteten Raumes $V = a$ sein; für diesen Theil der Kugeloberfläche ist daher $V - a = 0$; für den andern ist dagegen V verschieden von a und zwar kann man die Kugel immer so legen, dass in dem ganzen Theile derselben, welcher nach B fällt V entweder immer grösser als a ist oder immer kleiner. In beiden Fällen ist obiger Gleichung nicht entsprochen. Es kann also die Potentialfunction in dem ganzen zusammenhängenden Raume nur einen constanten Werth haben, wenn sie für einen Theil dieses Raumes constant ist.

Sind also die Agentien in einem Raume verbreitet, der schalenförmig einen von Agentien freien Raum umgibt, so ist, wenn die Potentialfunction in einem Theile dieses Raumes constant ist, diess für den ganzen eingeschlossenen Raum der Fall.

Ist dagegen das Agens in einen endlichen Raum eingeschlossen, so kann seine Potentialfunction in dem äusseren Raume nur entweder Null sein überall, oder veränderlich. Ist sie in einem Theile des unendlichen äusseren Raumes constant, so muss sie diess im ganzen äusseren Raume sein; in den unendlich entfernten Theilen kann sie aber nur unendlich klein sein.

Die Bewegung eines Massensystems.

247. Für die Bewegung des Massenmittelpunktes des Systems bewegter Massen gilt das in Nro. 195 über die Bewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers Gesagte unverändert. Die Beschleunigung des Massenmittelpunktes nach irgend einer Richtung ist dieselbe wie bei einem materiellen Punkte, dessen Masse gleich der Summe der Massen des ganzen Systems ist, und auf welchen alle äusseren Kräfte, welche auf das Massensystem wirken, parallel zu ihren Richtungen übertragen sind. Die inneren Kräfte des Systems, d. h. die von den einzelnen Massen auf einander ausgeübten Kräfte heben sich dabei, als paarweise entgegengesetzt vorhanden, gegenseitig auf. Sind einzelne Massen gegen feste Flächen gedrückt, welche dem Massensysteme nicht angehören, so müssen die Gegendrücke dieser Flächen den äusseren Kräften beigezählt werden.

Platzt z. B. eine Bombe in der Luft, so wird, abgesehen vom Luftwiderstande der Massenmittelpunkt der einzelnen Bombenstücke seine Bewegung in der Parabel fortsetzen, in welcher sich bisher der Schwerpunkt der Bombe bewegte, bis eines der Bombenstücke etwa am Boden aufschlägt. Hier tritt eine neue äussere Kraft, der Druck des Bodens auf, welcher die Bewegung des Massenmittelpunktes der Bombenstücke abändert.

Wirken nur die gegenseitigen Kräfte, welche die Massen des Systems selbst aufeinander ausüben, so ist die Bewegung des Mittelpunktes des Massensystems, seines Schwerpunktes, eine gleichförmige und geradlinige, oder derselbe ist in Ruhe.

248. Die Gleichungen (b) in Nro. 195 werden hier

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma P_x,$$

$$\Sigma m \frac{d^2 y}{d t^2} = \Sigma P_y,$$

$$\Sigma m \frac{d^2 z}{d t^2} = \Sigma P_z,$$

wo sich die Summen links auf alle Massen des Systems beziehen, die Summen rechts aber auf alle von ausserhalb des Systems herkommenden Kräfte. Integrirt man diese Gleichungen nach t, so erhält man

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_0^t P_x dt,$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_0^t P_y dt,$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma m \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_0^t P_z dt.$$

Hier sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Seitengeschwindigkeiten der Masse m zur Zeit t, diese Zeichen mit dem Indexe 0 aber die Seitengeschwindigkeiten zur Zeit 0. Diese Gleichungen sagen:

Die Zunahme der Grösse der Bewegung des Massensystems nach einer Richtung ist gleich der Summe der Antriebe der äusseren Kräfte, projicirt auf jene Richtung, während der betrachteten Zeit.

Wird ein Projectil aus einem Geschütze abgeschossen, so bilden das Projectil, die Pulvermasse und das Geschütz ein Massensystem, dessen Grösse der Bewegung vor dem Schusse Null ist. Durch die Entzündung und Verbrennung des Pulvers entstehen innere Kräfte, welche der Masse der Kugel, den aus dem Pulver entstandenen Gasen und der Masse des Geschützes Geschwindigkeiten mittheilen. Nennt man diese Massen m, m_1, M, und sind v, v_1 und V die Geschwindigkeiten, welche diese Massen durch den Schuss in der Richtung der Axe des Geschützes erlangen, wobei für das Pulvergas eine mittlere Geschwindigkeit v_1 zu

nehmen ist, so ist, weil hier kein Antrieb einer äusseren Kraft vorhanden ist

$$m v + m_1 v_1 + M V = 0,$$

oder also

$$V = -\frac{m v + m_1 v_1}{M},$$

das Geschütz wird mit dieser Geschwindigkeit, welche, wie das Zeichen — zeigt, der Geschwindigkeit v entgegengesetzt ist, seinen Rücklauf beginnen.

249. Auch die Ableitungen in Nro. 197 und Nro. 198 gelten unverändert für ein Massensystem, nur muss das d'Alembert-sche Princip hier so ausgesprochen werden: die verlornen Kräfte entsprechen bei einem Massensysteme den Bedingungen des Gleichgewichtes, welche für ein festes System von Massen gelten.

Die Gleichung (d) in Nro. 197 wird hier

$$\Sigma m \frac{d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = M_z$$

und wird ausgesprochen, die Flächenbeschleunigung eines Massensystems für eine feste Axe ist gleich der Summe der statischen Momente der äusseren Kräfte für diese Axe.

Sind keine äusseren Kräfte vorhanden, so ist M_z gleich Null, und dann ist

$$\Sigma m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{Const},$$

oder die Flächengeschwindigkeit des Massensystems um eine Axe constant. Wie in Nro. 203 lässt sich damit eine Axe der grössten Flächengeschwindigkeit bestimmen, welche, wenn die Flächengeschwindigkeiten für die Axen x, y, z constant sind, eine constante Richtung hat. Es gibt also eine Ebene von unveränderlicher Lage, auf welche die Flächengeschwindigkeit des Massensystems projicirt ein Maximum ist.

Der Satz von der Arbeit, oder das Princip der lebendigen Kräfte.

250. Hier fallen die Arbeiten der inneren Kräfte des Systems nicht wie bei dem starren Körper (Nro. 202) weg, weil sich die einzelnen Massen von einander entfernen können, oder sich

252. Auch wenn die Kräfte von einem beweglichen Systeme von Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ oder von Agentien $q_1, q_2, q_3 \ldots$ auf ein anderes bewegliches System von Massen $m', m'', m''' \ldots$ oder Agentien $q', q'', q''' \ldots$, welche mit diesen Massen verbunden sind, ausgehen, lässt sich noch die Zunahme der lebendigen Kräfte beider Systeme durch die Anfangs- und Endlage der beiden Systeme allein ausdrücken.

Sind m' und m_1 zwei Massen, deren Entfernung von einander r, und sind $\varepsilon q' q_1 f_r$ die Kräfte, mit welchen diese Massen gegenseitig abgestossen werden, sind x', y', z' und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten dieser Massen zur Zeit t, sind dx', dy', dz' die Projectionen des Weges der Masse m' in der Zeit dt, und ebenso dx_1, dy_1, dz_1, für die Masse m_1, so ist die Summe der Arbeiten der Kräfte bei diesen Bewegungen

$$\varepsilon q' q_1 f_r \left[\frac{x_1 - x'}{r} dx_1 + \frac{y_1 - y'}{r} dy_1 + \frac{z_1 - z'}{r} dz_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{x_1 - x'}{r} dx' - \frac{y_1 - y'}{r} dy' - \frac{z_1 - z'}{r} dz'\right].$$

Aus $\quad r^2 = (x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2 + (z_1 - z')^2$

ergibt sich aber die Aenderung von r für die stattfindenden Aenderungen der Coordinaten

$$dr = \frac{x_1 - x'}{r} dx_1 + \frac{y_1 - y'}{r} dy_1 + \frac{z_1 - z'}{r} dz_1$$
$$- \frac{x_1 - x'}{r} dx' + \frac{y_1 - y'}{r} dy' - \frac{z_1 - z'}{r} dz',$$

woraus die Arbeit, die oben berechnet ist

$$\varepsilon q_1 q' f_r dr$$

wird. Sind v_1 und v' die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m', und dv_1 und dv' die auf den betrachteten Wegen erlangten Zunahmen dieser Geschwindigkeiten, so ist

$$m_1 v_1 dv_1 + m' v' dv' = \varepsilon q q' f_r dr.$$

Bildet man diese Gleichung für alle Combinationen der Massen des einen Systems mit denen des andern, und addirt; integrirt man dann die so erhaltene Gleichung, so erhält man

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \Sigma \varepsilon q q' \int f_r dr,$$

wobei die Summen links alle Massen der beiden Systeme umfassen, die rechts aber alle Combinationen der Massen des einen Systems mit den Massen des andern.

Sind die Kräfte den Quadraten der Entfernungen umgekehrt proportional, so hat man rechts wieder die Differenz der Potentiale der beiden beweglichen Systeme auf einander im Anfangszustande und im Endzustande.

253. Wirken die Agentien eines beweglichen Systems von Massen selbst auf einander, so wird die Gleichung der letzten Nummer noch bestehen, die Summe rechts wird sich hier nur auf alle Combinationen der Agentien dieses Systems zu erstrecken haben; für den Fall der Kräfte, welche nach dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen wirken, wird man rechts die Differenz des Potentials des Systems auf sich selbst im End- und Anfangszustande erhalten.

Sind endlich einige der Agentien fest, andere beweglich, so wird man die Zunahme der lebendigen Kraft erhalten, indem man die beiden Sätze der zwei vorhergehenden Sätze zusammennimmt, wobei es gleichgiltig ist, ob man auch das Potential des festen Systems auf sich selbst hinzufügt, da dieses unverändert bleibt, und also aus der Differenz der Potentiale im Anfangs- und Endzustande wieder wegfällt.

Die Kräfte, welche die einzelnen Massen des Planetensystems auf einander ausüben, folgen dem Potentialgesetze. Hier ist also die Zunahme der lebendigen Kraft sämmtlicher Massen des Systems von irgend einem Zeitpunkte an gleich der Abnahme des Potentials des Systems auf sich selbst. Erhält das Potential zu irgend einer Zeit wieder denselben Werth, den es anfänglich hatte, so ist auch die lebendige Kraft im Planetensysteme wieder dieselbe, womit aber nicht gesagt ist, dass nun auch jeder einzelne Planet wieder dieselbe Geschwindigkeit habe.

Aufgaben über die Bewegung von Massensystemen.

254. An einer festen Rolle hängen durch eine biegsame Schnur verbunden zwei schwere Massen m und m_1 vertical herab; die Bewegung dieser Massen und ihren Druck auf die Axe der Rolle zu bestimmen.

Sieht man von der Masse der Schnur ab, ist x die Tiefe des Schwerpunktes der Masse m unter einer Horizontalebene durch die Axe der Rolle und x_1 die Tiefe des Schwerpunktes der Masse m_1 unter dieser Ebene, so ist die Tiefe des Mittelpunktes der Massen des Systems unter dieser Ebene, wenn man vorerst auch die Rolle als masselos denkt

$$\frac{m x + m_1 x_1}{m + m_1}.$$

Der Satz über die Bewegung des Massenmittelpunktes (Nro. 247) gibt nun

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = (m + m_1) g - N,$$

wo N der Druck auf die Axe der Rolle ist, welcher vertical aufwärts geht, wenn von der Reibung in den Zapfenlagern abgesehen wird; da aber $x + x_1$, weil die Massen durch eine Schnur von constanter Länge verbunden sind, eine constante Grösse ist, so ist

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - \frac{d^2 x_1}{d t^2},$$

womit obige Gleichung wird

$$(m - m_1) \frac{d^2 x}{d t^2} = (m + m_1) g - N. \qquad \text{(a)}$$

Der Satz über die Arbeit gibt, wenn man annimmt, die Massen gehen von der Ruhe aus

$$\frac{1}{2} (m + m_1) \left(\frac{d x}{d t}\right)^2 = m g (x - x_0) + m_1 g [x_1 - (x_1)_0],$$

wobei N nicht vorkommt, weil der Angriffspunkt von N nicht fortschreitet. Weil aber

$$x + x_1 = x_0 + (x_1)_0$$

ist, so wird die Gleichung

$$\frac{1}{2}(m + m_1)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (m - m_1)\,g\,(x - x_0). \tag{b}$$

Das Quadrat der erlangten Geschwindigkeit der Massen ist also dem Wege, welchen beide Massen durchlaufen haben, proportional; die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte; die Beschleunigung ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m - m_1}{m + m_1}\,g, \tag{c}$$

wie man durch Differenzirung der Gleichung (b) findet. Damit wird mit (a)

$$N = (m + m_1)\,g - \frac{(m - m_1)^2}{m + m_1}\,g = \frac{4\,m\,m_1}{m + m_1}\,g. \tag{d}$$

Ist S die Spannung der Schnur, so ist $2S = N$ oder die Spannung der Schnur die Hälfte von N.

Denkt man sich die Schnur durchschnitten, und an den Enden die Spannungen S als Kräfte angebracht, so erhält man auf elementarerem Wege dieselben Resultate.

Ist das Trägheitsmoment der Rolle, wenn man deren Trägheit auch berücksichtigen will, $\frac{1}{2}\,m_2\,r^2$ und r ihr Halbmesser, die erlangte Winkelgeschwindigkeit ω, so wird die Gleichung (b)

$$\frac{1}{2}(m + m_1)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4}\,m_2\,r^2\omega^2 = (m - m_1)\,g\,(x - x_0).$$

Wenn die Schnur nicht über die Rolle gleitet, sondern diese mitnimmt, so ist

$$r\omega = \frac{dx}{dt},$$

woraus

$$\frac{1}{2}\left(m + m_1 + \frac{1}{2}\,m_2\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (m - m_1)\,g\,(x - x_0),$$

und die Beschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m - m_1}{m + m_1 + \frac{1}{2}m_2}\cdot g.$$

Die Gleichung (a) bleibt unverändert.

255. Zwei homogene Kugeln bewegen sich in der geraden Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, ohne sich zu drehen. Sie treffen auf einander. Ihre Bewegung nach dem Stosse zu bestimmen.

Es seien m und m′ die Massen dieser beiden Körper, v und v′ ihre Geschwindigkeiten in dem Augenblicke, in welchem sie anfangen, sich zu berühren. Dabei sei v positiv und v′ positiv und kleiner als v, oder negativ. Im ersten Falle gehen beide Körper vor dem Stosse nach derselben Richtung und m hat m′ eingeholt, im zweiten Falle bewegen sich beide Körper einander entgegen. Vermöge der verschiedenen Geschwindigkeit drücken beide Körper auf einander; dieser Druck sei zur Zeit t während des Stosses N, nach der Seite der positiven v auf m′ und dem entgegen auf m.

Bei der als unmessbar klein vorausgesetzten Dauer des Stosses kann man die Wirkung der äusseren Kräfte während dieser Zeit ausser Acht lassen. Dann ist die Bewegung des Schwerpunktes beider Massen während dieser Zeit ebenfalls als unmessbar klein zu betrachten. Die Zunahme der Grösse der Bewegung während des Stosses ist (Nro. 248), wenn man mit u und u′ die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte beider Kugeln am Ende der betrachteten Zeit bezeichnet

$$m(u - v) + m'(u' - v') = 0.$$

Der Druck zwischen beiden Körpern wird jedenfalls so lange dauern, bis beide dieselbe Geschwindigkeit haben, bis also $u' = u$ wird. Diese beiden gemeinschaftliche Geschwindigkeit findet man

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}. \qquad \text{(a)}$$

Sind die Körper weich, so werden sie in der jetzt erlangten zusammengedrückten Form bleiben, und beide mit dieser Geschwindigkeit u fortgehen.

Sind die Körper dagegen elastisch, so sind sie zwar bis jetzt zusammengedrückt worden; nun aber, wo der Druck von aussen auf jeden derselben aufgehört hat, fangen sie an sich wieder auszudehnen, wodurch abermals ein Druck N zwischen beiden Körpern entsteht, welcher wieder auf m′ positiv und auf m negativ ist. Bei vollkommen elastischen Körpern findet eine vollkommene Wieder-

herstellung der Form statt; es wird also N dieselben Werthe rückwärts wieder durchlaufen, welche es bei der Zusammendrückung hatte, und es wird also auch sein Antrieb wieder derselbe sein, wie beim Zusammendrücken, oder die Zunahme der Grösse der Bewegung muss bei der Ausdehnung wieder dieselbe sein, wie bei der Zusammendrückung. Wird daher die Geschwindigkeit der Masse m' nach dem Stosse v'_1, so hat man

$$v'_1 - u = u - v' \quad \text{oder} \quad v'_1 = 2u - v'$$

und für die Masse m die erlangte Geschwindigkeit v_1 (b)

$$u - v_1 = v - u \quad \text{oder} \quad v_1 = 2u - v.$$

Im ersten Falle, dem der weichen Körper, findet eine Abnahme der lebendigen Kraft statt. Diese ist vor dem Stosse

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2,$$

nach dem Stosse
$$\frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} m' u^2.$$

Ihre Differenz ist

$$\frac{1}{2} m (v^2 - u^2) + \frac{1}{2} m' (v'^2 - u^2).$$

Zieht man von dieser Grösse

$$u(mv - mu + m'v' - m'u) = 0$$

ab, so erhält man für jene Differenz

$$\frac{1}{2} m (v - u)^2 + \frac{1}{2} m' (u - v')^2,$$

welche positiv ist. Die lebendige Kraft des Systems hat durch den Stoss abgenommen, und zwar um die lebendige Kraft, welche den Massen m und m' mit den verlornen oder gewonnenen Geschwindigkeiten $v - u$ und $u - v'$ zukommt. Es ist diess ein specieller Fall des sogenannten Carnot'schen Satzes. Die lebendige Kraft, welche hier verloren geht, ist zur Umformung der Körper und möglicher Weise zu einer entstandenen Molecularbewegung verwendet.

Bei elastischen Körpern erhält man durch Subtraction der beiden Gleichungen (b)

$$v'_1 - v_1 = v - v'. \qquad \text{(c)}$$

Die relative Geschwindigkeit beider Körper behält also hier dieselbe Grösse, ändert aber ihr Zeichen.

Die lebendige Kraft des Systems vor und nach dem Stosse ist hier dieselbe; ihre Differenz ist

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2 - \frac{1}{2} m' v_1'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} [m v^2 + m' v'^2 - m(2u - v)^2 - m'(2u - v')^2] =$$

$$= 2u[-mu + mv - m'u + m'v'],$$

was nach Gleichung (a) gleich Null wird.

256. Ist die Masse m' der vorhergehenden Nummer als unendlich gross gegen m zu betrachten und ist $v' = 0$, so hat man

$$u = 0$$

und für den Fall elastischer Körper

$$v' = -v.$$

Eine elastische Kugel, welche einen unbeweglichen Körper trifft wird mit der Geschwindigkeit, mit welcher sie ankommt, zurückgeworfen.

Sind die Massen der beiden Kugeln gleich gross, so hat man

$$2u = v + v' \text{ und } v_1 = v'; \; v'_1 = v.$$

Hier findet also bei elastischen Körpern Austauschung der Geschwindigkeiten statt.

Ist die eine Kugel vor dem Stosse in Ruhe, so geht sie nach dem Stosse mit der anfänglichen Geschwindigkeit der stossenden fort, und diese bleibt in Ruhe. Ist eine Reihe von gleichen elastischen Kugeln so aufgestellt, dass ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen, und stosst eine gleiche Kugel diese Reihe nach der Richtung dieser Mittelpunktslinie an, so kommt die stossende Kugel zur Ruhe, jede folgende erhält der Reihe nach die Geschwindigkeit der stossenden und kommt durch die nächste Kugel zur Ruhe, so dass endlich nur die letzte Kugel der Reihe mit der Geschwindigkeit der ersten stossenden Kugel fortgeht. Sind die Kugeln der Reihe in gegenseitiger Berührung, so bleibt scheinbar jede Kugel, mit Ausnahme der letzten, ganz in Ruhe, was experimentell

zeigt, dass der Stoss ohne messbare Verrückung des gestossenen Körpers vollendet wird.

257. Eine um eine horizontale Axe durch ihren Mittelpunkt rotirende elastische Kugel trifft eine horizontale feste Ebene; welches ist ihre Bewegung nach dem Stosse?

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Kugel im Augenblicke, in dem sie die Ebene berührt, sei v_0 und α der Winkel dieser Geschwindigkeit gegen die Normale zur Ebene, der Einfallswinkel. Ist m die Masse der Kugel, so ist die Grösse der Bewegung in der Richtung normal gegen die feste Ebene

$$m v_0 \cos\alpha$$

und also, wenn N der veränderliche Druck zwischen der Ebene und der Kugel nach dieser Normalen bedeutet und v_x die normale Geschwindigkeit der Kugel beides zur Zeit t

$$m(v_x - v_0 \cos\alpha) = -\int N\,dt.$$

Die Geschwindigkeit v_x wird Null, wenn

$$-m v_0 \cos\alpha = -\int N\,dt$$

geworden ist; während der Ausdehnung der elastischen Kugel wird derselbe Antrieb wieder auf diese ausgeübt, so dass endlich die Kugel die Geschwindigkeit $-v_0 \cos\alpha$ normal gegen diese Ebene oder die Geschwindigkeit $v_0 \cos\alpha$ von dieser weg hat.

Ist r der Halbmesser der Kugel und ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Rotation, so ist die Geschwindigkeit des Berührungspunktes anfänglich

$$v_0 \sin\alpha - r\,\omega_0 .$$

Dieser Geschwindigkeit wirkt die Reibung an der Ebene entgegen; diese ist also dem $v_0 \sin\alpha$ entgegengerichtet, so lange die Geschwindigkeit des Berührungspunktes positiv ist, wie $v_0 \sin\alpha$ oder gleich gerichtet, wenn die Geschwindigkeit des Berührungspunktes negativ wird.

Ist die Geschwindigkeit des Berührungspunktes während der ganzen Dauer des Stosses positiv, so ist, wenn v_y die Seitengeschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung tangential zur

Ebene ist, und wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist,

$$m(v_y - v_0 \sin\alpha) = -\mu \int N\,dt,$$

und

$$\frac{2}{5} m r^2 (\omega - \omega_0) = +\mu r \int N\,dt,$$

woraus, weil

$$\int N\,dt = 2 m v_0 \cos\alpha$$

für die ganze Dauer des Stosses ist,

$$v_y = v_0 \sin\alpha - 2\mu v_0 \cos\alpha \text{ und}$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{5\mu v_0 \cos\alpha}{r}$$

folgt. Es nimmt also hier die tangentielle Geschwindigkeit des Schwerpunktes ab, aber die Rotationsgeschwindigkeit zu. Es ist aber vorausgesetzt, dass $v_y - r\omega$ auch am Ende des Stosses noch positiv sei. Man sieht, dass die Geschwindigkeit des Berührungspunktes kleiner geworden ist.

Die Kugel verlässt die Ebene mit den Geschwindigkeiten

$$v_x = -v_0 \cos\alpha \text{ und } v_y = v_0 \sin\alpha - 2\mu v_0 \cos\alpha;$$

ist β der Zurückwerfungswinkel, so ist

$$\tan\beta = \frac{v_y}{-v_x} = \tan\alpha - 2\mu.$$

Der Zurückwerfungswinkel wird also nur dann gleich dem Einfallwinkel, wenn keine Reibung vorhanden ist; ist die Reibung dem $v_0 \sin\alpha$ entgegengerichtet, so wird der Reflexionswinkel kleiner als der Einfallswinkel, andernfalls wird er grösser.

Die lebendige Kraft der Kugel vor dem Stosse ist

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{2}{5} r^2 \omega^2 + v^2\right),$$

nach dem Stosse ist diese nur dann unverändert, wenn keine Reibung vorhanden ist; die Arbeit der Reibung ist vergleichbar mit den hier betrachteten Aenderungen der Geschwindigkeit, weil zwar ihr Weg unmessbar klein, sie selbst aber ausserordentlich gross ist.

Die Wellenbewegung eines biegsamen Fadens.

258. Ein biegsamer Faden ist gerade gespannt durch eine Kraft P. In ihr wird eine beliebige Strecke sehr wenig aus dieser geraden Linie gebracht, und den einzelnen Punkten in dieser Strecke werden beliebige, aber sehr kleine Geschwindigkeiten mitgetheilt; nun wird der Faden sich selbst überlassen. Die Bewegung seiner Theile, welche aus dieser Störung des Gleichgewichtszustandes erfolgt, zu bestimmen.

Wir nehmen von einem Punkte des Fadens an drei Coordinatenaxen an, die x in der Richtung des gerade gespannten Fadens; y und z rechtwinklich darauf.

Der Punkt des Fadens, welcher im Ruhezustande bei der Abscisse x liegt, habe zur Zeit t die Coordinaten

$$x + \xi, \ \eta \text{ und } \zeta$$

nach x, y und z, wo ξ, η, ζ Functionen von x und der Zeit t sein werden.

Für einen zweiten Punkt, welcher in der Ruhelage unendlich nahe bei dem ersten liegt, sei in der Ruhelage die Abscisse $x + \delta x$, dann werden die Coordinaten dieses Punktes zur Zeit t sein

$$x + \xi + \delta x + \frac{d\xi}{dx}\delta x; \ \eta + \frac{d\eta}{dx}\delta x; \ \zeta + \frac{d\zeta}{dx}\delta x. \qquad \text{(a)}$$

Aus der Verlängerung des Stückes des Fadens, das ursprünglich die Länge δx hatte, wie aus der Ablenkung desselben aus der Richtung x entspringen Aenderungen in seiner Spannung. Diese Spannung sei S in dem Anfangspunkte des betrachteten Stückes, welcher N heissen mag, und welcher in der Ruhelage die Abscisse x hat; während N' der Endpunkt des betrachteten Stückes sein soll. Die Spannung liegt in der Richtung der Tangente an den Faden bei N. Ihre Componenten nach x, y, z sind

$$S_x = S\cos(S, x); \ S_y = S\cos(S, y); \ S_z = S\cos(S, z).$$

Diese Componenten werden Functionen von x und t sein. Bei N' wird man daher zu derselben Zeit als Componenten der Spannung das haben, was obige Ausdrücke geben, wenn man in ihnen $x + \delta x$ für x setzt. Diess gibt die Componenten

$$S\cos(S,x) + \frac{d[S\cos(S,x)]}{dx}\delta x;\quad S\cos(S,y) + \frac{d[S\cos(S,y)]}{dx}\delta x;$$

$$S\cos(S,z) + \frac{d[S\cos(S,z)]}{dx}\delta x.$$

Denkt man sich das Stückchen N N′ des Fadens aus diesem ausgeschnitten, so muss man an ihm die Züge der weggeschnittenen Fadentheile anbringen, um den Zustand in ihm zu erhalten, welcher ihm als Theil des zusammenhängenden Fadens zukommt. Diese Züge sind aber die Spannungen in N und N′. Man wird daher im Punkte N die obigen Componenten mit entgegengesetztem, im Punkte N′ dagegen mit ihren Zeichen anbringen müssen. Damit ergeben sich die Componenten der das Stückchen N N′ bewegenden Kräfte

$$\frac{d[S\cos(S,x)]}{dx}\delta x;\quad \frac{d[S\cos(S,y)]}{dx}\delta x;\quad \frac{d[S\cos(S,z)]}{dx}\delta x.$$

Ist m die Masse der Längeneinheit des ruhenden Fadens, so ist die Masse des Theilchens N N′ gleich

$$m\delta x.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Stückchens werden nur um Unendlich kleine von den Coordinaten des Anfangspunktes verschieden sein, und dasselbe wird auch von den Beschleunigungen des Schwerpunktes gelten. Man hat daher die Beschleunigungen des Schwerpunktes, da x von t unabhängig ist,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2};\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}\ \text{und}\ \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

und damit ergeben sich die drei Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d[S\cos(S,x)]}{dx},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d[S\cos(S,y)]}{dx},\\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d[S\cos(S,z)]}{dx}. \end{aligned} \tag{b}$$

259. Um aus diesen Gleichungen die Bewegung des Fadens ableiten zu können, muss die Abhängigkeit der Spannung von den Verschiebungen festgestellt werden. Die Physik lehrt, dass in

einem gespannten Faden durch Verlängerung eines Stückes, das die Länge 1 hat, um ε eine Vermehrung der Spannung um $E\varepsilon$ eintritt; dass also, wenn P die Kraft ist, welche den Faden ursprünglich spannt, und ihm die Länge l gibt, die Kraft $P + E\varepsilon$ diese Länge um $l\varepsilon$ vermehrt, so dass die Länge desselben Fadens bei der Spannung $P + E\varepsilon$ gleich $l + l\varepsilon$ ist. Das oben betrachtete Stück NN' des Fadens hat die Länge (a)

$$\sqrt{\delta x^2 \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \delta x^2 \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \delta x^2 \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2},$$

während seine Länge bei der Spannung P gleich δx war; seine Ausdehnung auf die Längeneinheit beträgt daher

$$\sqrt{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2} - 1 = \varepsilon,$$

und die Spannung in ihm beträgt daher $P + E\varepsilon$.

Setzt man nun voraus, es seien die Werthe von ξ, η, ζ während der ganzen Dauer der Bewegung sehr klein, so wird dasselbe von den Ableitungen dieser Grössen nach x gelten; rechnet man dann mit diesen Grössen, als ob sie unendlich klein wären, das heisst, lässt man die höheren Potenzen derselben gegen die niedern weg, so erhält man eine Annäherung, die um so grösser ist, je kleiner die Verschiebungen ξ, η, ζ sind, und die für unendlich kleine Verschiebungen das richtige Resultat ist.

Damit wird

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} \tag{c}$$

und

$$S = P + E\frac{d\xi}{dx}.$$

Die Cosinus der Winkel (S, x); (S, y); (S, z) findet man

$$\cos(S, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}}$$ oder annähernd wie oben

$$\cos(S, x) = 1,$$

und ebenso

$$\cos(S,y) = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}}; \text{ annähernd} = \frac{d\eta}{dx},$$

und $\cos(S,z)$ annähernd $= \frac{d\zeta}{dx}$.

Damit werden nun die Gleichungen (b) der Bewegung

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = E\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = P\frac{d^2\eta}{dx^2}, \qquad \text{(d)}$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = P\frac{d^2\zeta}{dx^2}.$$

260. Diese Gleichungen zeigen zunächst, dass die Bewegungen nach der Länge des Fadens, nach x, unabhängig von den Bewegungen rechtwinklich auf x, und dass diese nach zwei aufeinander rechtwinklichen Richtungen zwar nach demselben Gesetze erfolgen, aber die eine auch ungestört durch die andere. Die Bewegung in der Richtung von x nennt man die Longitudinalbewegung des Fadens, die beiden andern, oder die aus den beiden andern resultirende die Transversalbewegung. Beide, die longitudinale und die transversale Bewegung erfolgen nach demselben Gesetze, aber die eine Constante, von welcher die erste abhängt, E ist eine andere als die analoge Constante P für die transversale Bewegung des Fadens. Die transversale Bewegung tritt für sich allein auf, wenn $\xi = 0$ ist, für jeden Werth von x; damit wird zugleich die Ausdehnung des Fadens ε bei der gebrauchten Annäherung gleich Null. Die longitudinale Bewegung ist mit Ausdehnungen und Verkürzungen der Fadentheile verbunden, Verdünnungen und Verdichtungen, die transversale Bewegung aber nicht. Die erste hängt desshalb von dem Coefficienten E ab, den man den Elasticitätsmodul nennen kann, die zweite dagegen nur von der Spannung P, welche der Faden ursprünglich hat.

Die transversale Bewegung.

261. Setzt man

$$\frac{P}{m} = a^2,$$

so ist das allgemeine Integral der zweiten der Gleichungen (c)

$$\eta = F_{x+at} + f_{x-at}, \tag{f}$$

wo F und f willkührliche Functionen der ihnen als Indexe beigegebenen Grössen bedeuten; von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich, indem man die zweiten Ableitungen von η nach t und nach x berechnet, und diese in die Gleichung (c) substituirt, welche dadurch identisch wird, was auch F und f für Functionen sind.

Für ζ erhält man dasselbe allgemeine Integral mit demselben Werthe von a.

Die willkührlichen Functionen müssen nun so bestimmt werden, dass sie dem Anfangszustande des Fadens entsprechen. Ist gegeben für $t = 0$

$$\eta = \varphi_x \text{ und } \frac{d\eta}{dt} = a\,\frac{d\psi_x}{dx},$$

wo φ_x und ψ_x beliebige Functionen von x sein können, welche nur der Bedingung der Stetigkeit und dem entsprechen, dass beide nur sehr kleine Werthe haben, so wird für $t = 0$

$$F_x + f_x = \varphi_x \text{ und } \frac{dF_x}{dx} - \frac{df_x}{dx} = \frac{d\psi}{dx},$$

oder wenn man die letzte Gleichung nach x integrirt

$$F_x - f_x = \psi_x,$$

wo keine Constante zugefügt ist, da diese in ψ_x mit enthalten sein kann. Daraus findet man

$$F_x = \frac{1}{2}\varphi_x + \frac{1}{2}\psi_x \text{ und}$$

$$f_x = \frac{1}{2}\varphi_x - \frac{1}{2}\psi_x .$$

Setzt man nun allgemein $\eta = \eta' + \eta''$ und dabei

$$\eta' = F_{x+at}, \quad \eta'' = f_{x-at}, \tag{g}$$

so ergeben sich aus den vorletzten Gleichungen η' und η'', wenn man $x + at$ oder $x - at$ für x in den Werthen von F_x und f_x setzt.

Zeichnet man sich die Curven

$$y = \varphi_x \text{ und } y_1 = \psi_x,$$

von welchen die erste als Ordinaten die anfänglichen Verschiebungen der Theile des Fadens gibt, die zweite aber durch die Tangenten der Neigungen ihrer Berührungslinien die durch a dividirten anfänglichen Geschwindigkeiten, so erhält man die Werthe von η', welche zu $t = 0$ gehören, als die halbe Summe der Ordinaten beider Curven, während η'' für $t = 0$ der halben Differenz dieser Ordinaten gleich ist.

262. Betrachten wir zuerst den Theil der Verschiebung

$$\eta'' = f_{x-at},$$

so sieht man, dass η'' denselben Werth an einer Stelle x' zur Zeit t' hat, wenn

$$x - at = x' - at',$$

oder

$$x' = x + a(t' - t)$$

ist. Die Ausbeugung η' an einer Stelle x schreitet also in der Zeit $t' - t$ um

$$\frac{x' - x}{a}$$

fort, das heisst gleichförmig mit der Geschwindigkeit a. Diese Geschwindigkeit ist unabhängig von x und daher für alle Punkte dieselbe. Es wird also derjenige Theil der Ausbeugung des Fadens, welcher durch η'' zu irgend einer Zeit gegeben ist, sich mit Beibehaltung der Aufeinanderfolge der Werthe der Ordinaten nach der Seite der positiven x mit der Geschwindigkeit a fortpflanzen. Ist also z. B. für $t = 0$ der Werth von η'' nur von $x = 0$ bis $x = l$ von Null verschieden, für alle andern Werthe von x aber gleich Null, so wird zur Zeit t die Ausbeugung η'' des Fadens nur von $x = at$ bis $x = at + l$ gehen, und ausserhalb dieser Strecke η'' überall Null sein, von $x = at$ bis $x = at + l$ werden sich aber die Werthe von η'' gerade so folgen, wie sie zur Zeit 0 von $x = 0$ bis $x = l$ aufeinander folgten. Man sagt hier, die Welle, welche zur Zeit $t = 0$ durch

$$\eta'' = \frac{1}{2}\varphi_x - \frac{1}{2}\psi_x$$

gegeben ist, laufe mit der constanten Geschwindigkeit a nach der Seite der positiven x an dem Faden fort. Die Geschwindigkeit a der Welle ist aus (261)

$$a = \sqrt{\frac{P}{m}} \tag{h}$$

und hängt also von der Spannung des Fadens P und seiner Masse m in seiner Längeneinheit ab.

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Theilchen des Fadens bewegt, ist, so weit sie von η'' abhängt,

$$\frac{d\eta''}{dt} = -a\frac{df_{(x-at)}}{d(x-at)} = -a\frac{df_{(x-at)}}{dx} = -a\frac{d\eta''}{dx},$$

oder sie ist gleich der negativen Tangente der Neigung der Berührungslinie an die durch η'' gegebene krumme Linie multiplicirt mit a. Steigt also die krumme Linie, deren Ordinate η'' ist, nach der Seite der positiven x an, so sind die Theilchen des Fadens in dieser Linie in der Bewegung nach der Seite der negativen y begriffen; fällt die Linie nach der Seite der positiven x, so bewegen sich die Theilchen des Fadens in der Richtung der positiven y. Dort, wo die Berührungslinie der Axe der x parallel geht, haben die Theilchen in diesem Momente keine Geschwindigkeit.

263. Der andere Theil der Ausbeugung des Fadens

$$\eta' = F_{x+at}$$

gibt ganz ebenso eine Wellenbewegung nach der Seite der negativen x; die Geschwindigkeit, mit der diese Welle sich fortpflanzt, ist wieder

$$a = \sqrt{\frac{P}{m}}.$$

Die anfängliche Form der Welle

$$\eta' = F_x = \frac{1}{2}\varphi_x + \frac{1}{2}\psi_x$$

bleibt unverändert, und nur in der Geschwindigkeit der Theilchen des Fadens besteht gegen die nach der Seite der positiven x fortschreitende Welle der Unterschied, dass hier

$$\frac{d\eta'}{dt} = a\frac{dF_{x+at}}{d(x+at)} = a\frac{dF_{x+at}}{dx} = a\frac{d\eta'}{dx}$$

ist. In dem gegen die positive Seite der x ansteigenden Theile der Curve ist daher hier die Geschwindigkeit der Theile des Fadens positiv, hier werden die η' grösser, in dem absteigenden Theile dagegen negativ, hier werden die η' kleiner, wodurch eben das Fortschreiten der Ausbeugung nach der Seite der negativen x sich bedingt.

264. Ist nun eine beliebige Ausbeugung in einem Theile des Fadens, etwa von $x = 0$ bis $x = l$ anfänglich hervorgebracht, wobei die einzelnen Punkte des Fadens zwischen diesen Grenzen beliebige Geschwindigkeiten haben können, während alle ausser diesen Grenzen liegenden Punkte des Fadens zur Zeit Null in der Gleichgewichtslage in Ruhe sind, so wird sich diese Ausbeugung in zwei theilen, welche durch

$$\eta' = \frac{1}{2}\varphi_x + \frac{1}{2}\psi_x \text{ und } \eta'' = \frac{1}{2}\varphi_x - \frac{1}{2}\psi_x$$

gegeben sind, und welche im Allgemeinen beide ebenfalls die Länge l haben. Von diesen wird die erste nach der Seite der negativen x, die andere nach der Seite der positiven x, jede mit der Geschwindigkeit a und Beibehaltung ihrer Form fortschreiten. So lange sich diese beiden Ausbeugungen theilweise noch überdecken, wird die Ausbeugung des Fadens die Summe $\eta' + \eta''$ sein. Nach der Zeit

$$t = \frac{l}{2a}$$

werden aber beide Ausbeugungen sich getrennt haben, und nun werden nach beiden Seiten hin zwei im Allgemeinen verschiedene Wellen fortschreiten, deren Formen durch die beiden obigen Werthe von η' und η'' gegeben sind, welche sie immer beibehalten. Dass hier aus einer dieser beiden Wellen nicht wieder zwei entstehen, hat seinen Grund in dem Zusammenhange, welcher für jede von diesen zwischen ihrer Form und der Geschwindigkeit der Theilchen des Fadens besteht, nämlich

$$\frac{d\eta'}{dt} = a\frac{d\eta'}{dx} \text{ und } \frac{d\eta''}{dt} = -a\frac{d\eta''}{dx},$$

welche Bedingung bei der anfänglichen Ausbeugung nicht erfüllt war. Ist diess aber zufällig der Fall, so trennt sich diese Ausbeugung nicht in zwei Wellen, sondern gibt nur eine nach der Seite der negativen oder der positiven x fortgehende Welle, je nachdem

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm a \frac{d\eta}{dx}$$

ist.

Die Bewegung eines Punktes des Fadens wird für die jenseits x gleich l liegenden Punkte für einen Punkt, dessen Abscisse x_1 ist, anfangen, wenn

$$x_1 - at = l \text{ oder } t = \frac{x_1 - l}{a}$$

geworden ist, und wird fortdauern bis

$$x_1 - at = 0 \text{ oder } t = \frac{x_1}{a}$$

geworden ist. Die Dauer der Bewegung ist

$$\frac{l}{a}$$

für alle Punkte dieselbe, wie auch jeder dieser Punkte dieselbe Bewegung durchlauft.

Das gleiche gilt für die Punkte, die auf der negativen Seite der x liegen. Bei einem, der bei $-x_1$ liegt, fängt die Bewegung an für

$$t = \frac{x_1}{a}$$

und dauert fort bis

$$t = \frac{x_1 + l}{a}.$$

Die longitudinale Bewegung.

265. Die Gesetze dieser Bewegung sind dieselben, wie für die transversale, nur ist hier die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen fortschreiten

$$b = \sqrt{\frac{E}{m}} \tag{k}$$

und die Geschwindigkeit der Theile des Fadens ist, für die nach der Seite der positiven x fortschreitenden Welle

$$\frac{d\xi''}{dt} = -b\frac{df_{x-bt}}{d(x-bt)} = -b\frac{df_{x-bt}}{dx} = -b\frac{d\xi''}{dx} = -b\varepsilon'',$$

und für die nach der negativen Seite der x fortschreitende Welle ebenso

$$\frac{d\xi'}{dt} = +b\varepsilon',$$

wo ε'' und ε' die an den betrachteten Stellen stattfindenden Ausdehnungen bedeuten (c in Nro. 259).

Die Geschwindigkeit der Theile des Fadens ist daher hier der Ausdehnung proportional, und zwar in der nach der positiven Seite der x fortschreitenden Welle negativ, wenn ε'' positiv ist, oder in dem ausgedehnten Theile der Welle bewegen sich die Theilchen des Fadens dem x entgegen, in dem verdichteten Theile dagegen nach der Seite der positiven x. In der nach der negativen Seite der x fortschreitenden Welle ist das gerade umgekehrt, oder in beiden Wellen bewegen sich die Theile der verdichteten Welle nach der Seite, nach der die Welle fortschreitet, die Theile der verdünnten, ausgedehnten, dagegen der Welle entgegen.

Zurückwerfung einer Welle.

266. Ist ein Punkt des Fadens, welcher bei $x = c$ liegen soll, unbeweglich befestigt, so kommt die Bedingung zu den bisherigen, dass für $x = c$ die Ausbeugung sowohl als die Geschwindigkeit gleich Null sein müssen, also für die transversale Welle mit den früheren Bezeichnungen

$$\eta = 0 \text{ und } \frac{d\eta}{dt} = 0\,.$$

Ich setze voraus, c sei positiv. Es ist allgemein

$$\eta = F_{x+at} + f_{x-at}$$

und die anfängliche Ausbeugung kann sich entweder bis $x = c$ oder bis zu einem kleineren Werthe von x erstrecken. Dann kann man jedenfalls die anfängliche Welle wie oben in zwei zerlegen, von welchen die eine

$$\eta' = F_{x+at}$$

nach der Seite der negativen x fortläuft und daher den Punct c nie erreicht, oder wenn sie ihn anfänglich berührt, sogleich verlässt. Die andere

$$\eta'' = f_{x-at},$$

dagegen erreicht den Punkt $x = c$ und wird also dort eine neue Bewegung hervorrufen, welche aber nur nach der Seite der negativen x fortgehen kann, weil dorthin allein freier Faden ist. Setzt man daher allgemein

$$\eta = F_{x+at} + f_{x-at} + \mathfrak{f}_{x+at},$$

was dem allgemeinen Integrale der Differentialgleichung entspricht, wenn $\mathfrak{f}$ eine noch näher zu bestimmende Function bezeichnet, so kann man

$$\eta' = F_{x+at}; \quad \eta'' = f_{x-at}$$

aus dem gegebenen Anfangszustande wie früher bestimmen, wozu dann noch die Bestimmung

$$\eta''' = \mathfrak{f}_x = 0 \tag{1}$$

für alle Werthe von $x = -\infty$ bis $x = c$ hinzukommt.

Lässt man nun die Bewegung η' ausser Betracht, als hier ohne Einfluss, so hat man nach

$$\eta = f_{x-at} + \mathfrak{f}_{x+at}$$

und diess muss für jeden Werth von t und für x gleich c der Bedingung

$$f_{c-at} + \mathfrak{f}_{c+at} = 0$$

entsprechen. Daraus findet man, wenn man

$$t + \frac{x}{a} - \frac{c}{a} \text{ für } t$$

setzt
$$\mathfrak{f}_{x+at} = -f_{2c-x-at}.$$

Diess entspricht der Bedingung (1), weil für $t = 0$

$$f_{2c-x}$$

nur Werthe hat, so lange $x > c$ ist.

Die Gleichung

$$\eta''' = \mathfrak{f}_{x+at} = -f_{2c-x-at}$$

entspricht aber einer Welle, welche aus der Entfernung $2c$ bei $t = 0$ herzukommen scheint, und für welche bei $x = 2c$ der Werth von $-\eta'''$ derselbe ist, welchen η'' bei $x = 0$ hat; und für $x = 2c - x'$ der Werth von $-\eta'''$ derselbe, welchen η'' bei x' hat. Es hat also die Welle η''' dieselbe Form, wie η'', mit dem Unterschiede, dass die Zeichen die entgegengesetzten sind, und dass das am weitesten von $x = 0$ wegliegende Ende der Welle η'' das nächstliegende der Welle η''' ist. Diese Welle schreitet nach der Seite der negativen x fort, wenn man sich den Faden über den unbeweglichen Punkt fort verlängert denkt, und erreicht zu gleicher Zeit mit der Welle η'' diesen Punkt. An diesem treffen zu gleicher Zeit immer gleich grosse aber entgegengesetzte Werthe von η'' und η''' zusammen; dieser Punkt bleibt daher in Ruhe. Für $x = c$ hat man

$$\eta'' + \eta''' = f_{c-at} - f_{2c-c-at},$$

was unabhängig von t gleich Null ist, wesshalb auch der zweiten Bedingung, dass die Geschwindigkeit dieses Punktes Null sein soll, entsprochen ist.

Für Werthe von x kleiner als c werden beide Wellen zusammentreten, interferiren, und dort die Gestalt beider sich ändern, bis endlich die Welle η'' ganz über c hinausgetreten und zu gleicher Zeit die Welle η''' ganz innerhalb den bis c gehenden Faden getreten ist. Nun geht die bei c zurückgeworfene Welle η''' allein nach der Seite der negativen x fort und behält ihre der η'' gleiche, aber auf der andern Seite der y liegenden Form bei. Die Erscheinung ist ganz die, als sei das über das Ende c hinausliegende Stück der Welle η'' auf der andern Seite der y Axe wieder von c hereingekommen, an c zurückgeworfen werden.

Die stehende Schwingung eines biegsamen Fadens.

267. Ist der in den letzten Nummern betrachtete Faden an beiden Enden unbeweglich befestigt, so wird an jedem dieser Punkte die dort ankommende Welle zurückgeworfen, die beiden zurückgeworfenen Wellen durchkreuzen sich, kommen wieder an die unbe-

weglichen Punkte, werden aufs neue zurückgeworfen und so entsteht zwischen den beiden Fixpunkten eine eigenthümliche Bewegung des Fadens, welche man, da bei ihr zwei Punkte des Fadens unbeweglich bleiben, und der Faden nur zwischen diesen hin und her schwingt, eine stehende Schwingung genannt hat.

Ist l die Länge des Fadens zwischen den beiden Fixpunkten, und der eine Fixpunkt der Ursprung der x, so wird jede der oben mit η' und η'' bezeichneten Wellen nach der Zeit

$$t = \frac{l}{a},$$

wenn a die Geschwindigkeit der Wellenbewegung bezeichnet, zurückgeworfen sein; bei jeder werden die η' und η'' dieselben Werthe, wie vor dieser Zeit, nur mit entgegengesetztem Zeichen haben, wenn man die Abscisse x mit $l - x$ vertauscht. Es wird also auch die Form des Fadens nach dieser Zeit wieder dieselbe sein, wie anfänglich, nur nach der entgegengesetzten Seite der y und das Ende bei $x = 0$ jetzt bei $x = l$.

Nach einer zweiten Periode

$$t = \frac{l}{a}$$

wird ebenso aus dieser Form wieder die anfängliche Form des Fadens sich gebildet haben, so dass nach der Zeit

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

die Bewegung sich in gleicher Weise wiederholt.

268. Dieselbe stehende Schwingung erhält man in folgender Weise. Erregt man an einem unendlichen durch P gespannten Faden zuerst auf die Länge l, welche von A bis B gehe, die Ausbeugung

$$\eta'' = \frac{1}{2}\varphi_x - \frac{1}{2}\psi_x,$$

und gibt dabei jedem Punkte die Geschwindigkeit

$$\frac{d''\eta}{dt} = -a\frac{d\eta''}{dx};$$

erregt von B aus abermals auf die Länge l die Ausbeugung

$$\eta'' = F_x = -\left(\frac{1}{2}\varphi_{2l-x} + \frac{1}{2}\psi_{2l-x}\right),$$

und gibt auch hier jedem Punkte die Geschwindigkeit

$$\frac{d\eta''}{dt} = -a\frac{d\eta''}{dx};$$

wiederholt man endlich dieses je auf die Länge 2l in gleicher Weise, und zwar sowohl nach der positiven, als nach der negativen Seite der x hin; so hat man eine Welle, oder vielmehr eine Wiederholung von gleichen Wellen, von denen jede die Länge 2l hat, welche sich mit Beibehaltung ihrer Form gleichförmig nach der Seite der positiven x fortbewegen wird. Sie bringt nach dem Stücke AB abwechselnd eine Wellenform, welche dem ursprünglichen Wellenstück η'' zwischen diesen Punkten gleich, und solche, welche der in A zurückgeworfenen Welle η' gleicht.

Bringt man zu diesem Wellenzuge einen zweiten, welcher nach der Seite der negativen x fortgeht, und welcher nach AB abwechselnd die ursprüngliche Form der η' und dann die Form der in B zurückgeworfenen Welle η'' führt, so wird durch diesen und den ersten Wellenzug innerhalb AB die Form des Fadens und die Geschwindigkeit seiner Punkte in jedem Augenblicke dieselbe sein, welche in dem zwischen AB schwingenden Faden zu dieser Zeit ist, wenn $\eta' + \eta''$ die anfängliche Form dieses Fadens ist und die Geschwindigkeit der Punkte die dem entsprechende

$$\frac{d\eta'}{dt} + \frac{d\eta''}{dt}$$

für $t = 0$.

Bei dem Uebereinanderwegschreiten dieser beiden Wellenzüge werden die Punkte A und B in Ruhe bleiben, und ebenso jeder um l von diesen in der Richtung x entfernte Punkt. Diese Punkte nennt man die Schwingungsknoten. Ihre gegenseitige Entfernung ist die halbe Länge der sich gegenseitig durchdringenden Wellen. Zwischen je zwei Schwingungsknoten entsteht eine stehende Schwingung, welcher der in AB stattfindenden gleich ist, d. h. das dort befindliche Stück des Fadens durchläuft nach und

nach und in derselben Dauer dieselben Formen, welche das Fadenstück AB annimmt. Die Oscillationsdauer ist

$$\frac{2l}{a}$$

für die Wellen, bei denen a die Geschwindigkeit ist.

Hat man zwei beliebige Wellen, von welchen die eine nach der Seite der positiven x fortschreitet

$$\eta'' = f_{x-at}$$

und die andern nach der Seite der negativen x

$$\eta' = F_{x+at}$$

so wird sich ein Schwingungsknoten bei dem Ursprunge der Abscissen durch die Interferenz dieser beiden Wellenzüge bilden, wenn für $x = 0$

$$\eta' + \eta'' = F_{at} + f_{-at}$$

unabhängig von t gleich 0 ist, oder wenn

$$F_{at} = -f_{-at}$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung x für a t, so wird sie

$$F_x = -f_{-x}.$$

Die beiden Wellenzüge müssen daher in der Weise symmetrisch um den Ursprung der Coordinaten liegen, dass für rechts und links gleich weit abstehende Punkte

$$\eta'_x = -\eta''_{-x}$$

ist.

Dass dann zu gleicher Zeit von beiden Wellen gleich grosse, aber entgegengesetzte Ordinaten nach $x = 0$ kommen, ist klar.

Soll in der Entfernung l abermals ein Schwingungsknoten entstehen, so muss auch

$$F_{l+at} + f_{l-at} = 0$$

sein. Setzt man hier $t = \frac{x}{a} - \frac{l}{a}$, so wird diese Gleichung

$$F_x = -f_{2l-x}.$$

Daraus folgt in Verbindung mit dem oben gefundenen Werthe von F_x, dass die Function f immer für zwei um 2l auseinander stehende

Punkte denselben Werth geben muss, dass sie periodisch ist, oder dass der Wellenzug η'' aus gleichen Wellen von der Länge $2l$ bestehen müsse. Dasselbe gilt dann natürlich von η'. Begreiflich kann aber η'' auch aus Wellen von der Länge $\frac{2l}{n}$ bestehen, wo n eine ganze Zahl ist; dann wird auch bei l ein Schwingungsknoten entstehen, aber auch schon bei $\frac{l}{n}$, $\frac{2l}{n}$, $\frac{3l}{n}$ ... bis l.

Die stehende Schwingung, welche hierbei auf die Länge l statt findet, besteht hier aus n einzelnen stehenden Schwingungen, jede von der Länge $\frac{l}{n}$, und der Faden hat hier denselben Zustand der Bewegung wieder erreicht, oder eine Oscillation gemacht, wenn die Welle um ihre Länge $\frac{2l}{n}$ fortgepflanzt ist, d. h. in der Zeit

$$\tau = \frac{2l}{na}.$$

Zerlegung der stehenden Schwingung in einfache stehende Schwingungen.

269. Ein particuläres Integral der allgemeinen Bewegungsgleichung (Nro. 259)

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

ist
$$\eta = A\cos(mx + \alpha)\cos(mat + \beta),$$
wie man sich leicht überzeugt; A, m, α, β sind constant.

Soll dieses Integral eine zwischen den Fixpunkten $x = 0$ und $x = l$ stattfindende stehende Schwingung geben, so muss $\eta = 0$ sein für diese beiden Werthe von x, unabhängig von t.

Für $x = 0$ erhält man

$$0 = A\cos\alpha\cos(mat + \beta),$$

woraus
$$\cos\alpha = 0,$$
und
$$\cos(mx + \alpha) = \pm\sin mx$$
folgt. Das Zeichen kann man in den Werth von A legen und hat damit
$$\eta = A\sin mx\cos(mat + \beta).$$
Für $x = l$ gibt die Bedingung

$$0 = \sin m l,$$

woraus
$$m l = \mathfrak{a}\pi \text{ und } m = \frac{\mathfrak{a}\pi}{l},$$

wo $\mathfrak{a}$ jede ganze Zahl vorstellen kann; es genügt aber, nur positive Zahlen dafür zu nehmen. Damit wird

$$\eta = A \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l} \cos\left(\frac{\mathfrak{a}\pi a t}{l} + \beta\right),$$

wovon sich leicht nachweisen lässt, dass es in der früher gegebenen Form des allgemeinen Integrals enthalten ist. Wegen der linearen Form der gegebenen Differentialgleichung entspricht nun auch

$$\eta = \Sigma A_{\mathfrak{a}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l} \cos\left(\frac{\mathfrak{a}\pi a t}{l} + \beta\right),$$

wo für $\mathfrak{a}$ nach und nach alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden können.

Für $t = 0$ soll nun

$$\eta = \varphi_x \text{ und } \frac{d\eta}{dt} = a\frac{d\psi}{dx}$$

sein. Diess gibt die Bedingung

$$\varphi_x = \Sigma A_{\mathfrak{a}} \cos\beta \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}$$

$$\frac{d\psi_x}{dx} = -\Sigma\frac{\mathfrak{a}\pi}{l} A_{\mathfrak{a}} \sin\beta \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}.$$

Da β von einem Gliede dieser Summe zum andern andere Werthe haben kann, so sind die

$$A_{\mathfrak{a}} \cos\beta \text{ und } A_{\mathfrak{a}} \sin\beta$$

von einander ganz unabhängig und man kann also beiden Bedingungen entsprechen.

Es ist aber zwischen 0 und l, da man φ_{-x} hier gleich $-\varphi_x$ annehmen kann

$$\varphi_x = \frac{2}{l}\Sigma \int_0^l \varphi_\alpha \sin\frac{\mathfrak{a}\pi\alpha}{l}\, d\alpha \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}$$

woraus

$$A_{\mathfrak{a}} \cos\beta = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_\alpha \sin\frac{\mathfrak{a}\pi\alpha}{l}\, d\alpha \text{ und}$$

$$A_\alpha \sin\beta = -\frac{2}{\alpha\pi}\int_0^l \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}\sin\frac{\alpha\pi\alpha}{l}\,d\alpha \tag{m}$$

folgt. Damit wird

$$\eta = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_\alpha \sin\frac{\alpha\pi\alpha}{l}\,d\alpha \sin\frac{\alpha\pi x}{l}\cos\frac{\alpha\pi a t}{l}$$

$$+\frac{2}{\pi}\Sigma\frac{1}{\alpha}\int_0^l \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}\sin\frac{\alpha\pi\alpha}{l}\,d\alpha \sin\frac{\alpha\pi x}{l}\sin\frac{\alpha\pi a t}{l}.$$

Die Dauer der Oscillation ergibt sich wie früher

$$t = \frac{2l}{a}.$$

Entspricht der Anfangszustand einem einzelnen Gliede dieser Reihe, so werden die Coefficienten aller andern gleich Null, und man hat dann entweder ein Glied von der Form

$$\eta = A\sin\frac{\alpha\pi x}{l}\cos\frac{\alpha\pi a t}{l},$$

oder von der Form

$$\eta_1 = B\sin\frac{\alpha\pi x}{l}\sin\frac{\alpha\pi a t}{l}.$$

Die Bewegung, welche durch ein solches Glied dargestellt wird, nennt man eine einfache stehende Schwingung.

Betrachtet man die mit η bezeichnete, so sieht man, dass für x gleich

$$0;\ \frac{l}{\alpha};\ \frac{2l}{\alpha};\ \ldots\ l$$

Schwingungsknoten vorhanden sind. Der Faden, die Saite durchläuft eine Oscillation in der Zeit

$$\tau = \frac{2l}{\alpha a}.$$

Alle Theile der Saite kommen zu gleicher Zeit zur Ruhe, und haben zu einer andern Zeit zugleich ihr Maximum der Geschwindigkeit.

Ganz dasselbe gilt von der zweiten Schwingung, welche durch η_1 gegeben ist. Der Unterschied ist nur der, dass bei der ersten, η, die Geschwindigkeit aller Theile des Fadens für $t = 0$ Null sind, während die Theile bei der zweiten Schwingung für $t = 0$ das Maximum ihrer Geschwindigkeit haben, und erst nach der Zeit

$$\frac{\tau}{4}$$

in den Zustand kommen, welcher bei η für $t = 0$ statt findet, dass also die Phase der zweiten Schwingung $\frac{\pi}{2}$ gegen die der ersten ist. Die Amplituden der Schwingungen sind A und B.

Die Wellen, aus deren Interferenz eine solche einfache Schwingung hervorgeht, sind für die oben mit η bezeichnete Schwingung, da hier die Geschwindigkeit der Theilchen für $t = 0$ selbst Null ist, also das frühere ψ_x auch Null ist

$$\eta' = \frac{1}{2}\varphi_x = \eta'' = \frac{1}{2} A \sin \frac{a\pi x}{l}$$

und sind daher beide gleich. Ihre Wellenlänge ist

$$\frac{2l}{a}.$$

Die stehende Schwingung eines Fadens, einer Saite, lässt sich daher im Allgemeinen aus einfachen Schwingungen zusammensetzen, welche der Reihe nach die Oscillationsdauern

$$\tau = \frac{2l}{a}; \quad \frac{1}{2}\tau; \quad \frac{1}{3}\tau; \quad \frac{1}{4}\tau \ldots.$$

haben; deren Amplituden verschiedene sind, auch einzelne gleich Null sein können. Die Grösse dieser Amplituden bestimmen die beiden Formeln (m). Will man diese einfachen stehenden Schwingungen als durch die Interferenz zweier entgegengesetzt laufenden Wellen entstanden betrachten, so sind diese beiden Wellen einander gleich, und ihre Form durch

$$\eta'' = \frac{1}{2} A \sin \frac{a\pi x}{l},$$

oder

$$\mp \frac{1}{2} B \cos \frac{a\pi x}{l},$$

von $x = -\infty$ bis $+\infty$ gegeben; für die eine gilt das obere, für die andere das untere Zeichen.

Ebenso wie hier die stehende Schwingung aus einfachen Schwingungen zusammengesetzt wurde, lässt sich die fortlaufende Wellenbewegung aus einer unendlichen Reihe von einfachen Wellenzügen zusammensetzen, wobei die Beibehaltung der Form der Welle sich aus der Unabhängigkeit der Geschwindigkeit der Wellen von ihrer Länge ergibt.

Viertes Buch.

Kräfte an einem Körper, dessen Theile verschiebbar gegen einander sind.

Die Spannung und Pressung in einem Körper.

270. Denkt man sich durch einen Körper, auf welchen irgendwie Kräfte wirken, eine beliebige Ebene gelegt, so wird in jedem Punkte dieser Ebene ein Zug oder Druck des Körpertheils auf der einen Seite der Ebene auf den Körpertheil auf der andern Seite der Ebene stattfinden. Um einen Begriff von der Grösse und Richtung dieses Zugs für irgend einen Punkt x, y, z dieser Ebene zu geben, gibt man an, wie gross der Zug auf die Flächeneinheit der Ebene sein würde, wenn er in jedem Punkte dieser Flächeneinheit derselbe in Grösse und Richtung wäre, wie er im Punkte x, y, z ist. Diesen Zug auf die Flächeneinheit nennen wir die im Punkte x, y, z stattfindende Spannung; die Richtung dieser Spannung ist die Richtung des Zugs im Punkte x, y, z. Die Ebene, für welche diese Spannung gilt, nennen wir die Spannungsebene.

Ist n eine durch den Punkt x, y, z gezogene gerade Linie, so bezeichnen wir mit N die Spannung, welche im Punkte x, y, z in der zu n normalen Ebene durch x, y, z stattfindet; ebenso soll im Späteren X die Spannung in der zu x normalen Spannungsebene bedeuten.

Die Spannung N zerlegen wir in drei Componenten nach den unter sich rechtwinklichen Coordinatenaxen und bezeichnen diese Componenten mit

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z,$$

so dass also $$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

und $$\cos(N, x) = \frac{N_x}{N}; \cos(N, y) = \frac{N_y}{N}; \cos(N, z) = \frac{N_z}{N}$$

ist. Ebenso bedeute N_s die Componente der Spannung N nach der Richtung s; X_z die Spannung in der zu x normalen Ebene zerlegt nach z.

Hierbei soll, wie bei den Kräften überhaupt, N kein Zeichen haben, dagegen sollen N_x, N_y, N_z positiv sein, wenn diese Kräfte in die Richtung der wachsenden x, y, z fallen, andernfalls negativ.

Zerlegt man die Spannung n in eine nach n gehende, also normal zur Spannungsebene liegende Componente N_n und in eine zweite, welche in der Spannungsebene liegt, so nennt man die erste die Normalspannung in dieser Ebene und diesem Punkte, die andern die Tangentialspannung, welchen Namen man auch deren Componenten in der Spannungsebene beilegt.

271. Die Spannungen rühren bei Körpern, deren Theile gegen einander verschiebbar sind, von den Verschiebungen her, welche die auf den Körper einwirkenden äusseren Kräfte in ihm hervorgebracht haben, und von den Ausdehnungen und Verdichtungen, von welchen diese Verschiebungen begleitet sind. Bei jeder durch den Körper gelegten Ebene hat man den Zug auf den einen und den Gegenzug auf den andern Theil des Körpers, welche durch die Ebene getrennt sind, zu betrachten. Zug und Gegenzug sind gleich gross und entgegengesetzt, da sie durch dieselbe Ausdehnung oder dieselbe Verschiebung bedingt sind.

Wir betrachten die Normalspannung nach der Normalen, welche aus dem Körpertheil, der betrachtet wird, austritt. Fällt also die Normalspannung mit dieser Normalen zusammen, so übt der weggebrachte Körpertheil auf den betrachteten einen Zug aus, der Körper ist an der betrachteten Stelle ausgedehnt; diess ist der Fall, wenn die normale Spannung positiv ist. Ist sie dagegen negativ, so übt der weggedachte Körpertheil auf den betrachteten eine Kraft aus, welche in diesen letzten eindringt, einen Druck; in diesem Falle nennt man die absolut genommene Normalspannung auch eine Normalpressung.

Unter X, Y, Z werden wir immer die Spannungen in den zu x, y, z normalen Ebenen verstehen, welche an den Theilen des Körpers anzubringen sind, aus welchen die positiven x, y, z heraustreten. X_x ist dann immer, wenn positiv eine eigentliche Spannung, wenn negativ eine Pressung.

Die Componenten des Zugs nach den drei Coordinatenaxen, werden für eine endliche Ebene, von welcher ds ein Element ist, in welchem die Componenten der Spannung

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z$$

sind

$$\int N_x\, ds, \quad \int N_y\, ds, \quad \int N_z\, ds,$$

wo die Integrale über die ganze zu betrachtende Ebene auszudehnen sind.

Das statische Moment dieser Züge ist für eine der Axe der x parallele Axen durch den Punkt x_0, y_0, z_0

$$\int N_z (y - y_0)\, ds - \int N_y (z - z_0)\, ds \cdot$$

Aendert sich die Spannung von einem Punkte zum andern stetig, so kann man die drei Componenten der Pressung nach Potenzen von $x - x_0$; $y - y_0$; $z - z_0$ entwickeln; ist dann die betrachtete Fläche unendlich klein, und liegt x_0, y_0, z_0 in dieser Fläche, so hat man mit Weglassung der unendlich Kleinen von höherer Ordnung als der zweiten, das obige Moment

$$N_z \int (y - y_0)\, ds - N_y \int (z - z_0)\, ds,$$

was sich, wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Schwerpunktes der betrachteten Fläche sind, auf Null reducirt. Für eine unendlich kleine Fläche s ist daher bis zu unendlich kleinen der vierten Ordnung das Moment des Zugs oder der Spannung in dieser Fläche für eine durch den Schwerpunkt der Fläche gehende Axe gleich Null.

272. Schneidet man aus dem Körper ein Hexaeder, dessen eine Ecke die Coordinaten x, y, z zur Zeit t hat, dessen Kanten dx, dy, dz sein sollen, so sind die Züge auf die um die eine Ecke, um x, y, z liegenden Flächen

$$-X\,dy\,dz;\quad -Y\,dx\,dz;\quad -Z\,dx\,dy;$$

negativ, weil hier das positive x, y, z in den betrachteten Körper tritt, und also den obigen Bezeichnungen zu folge hier die negativen Werthe genommen werden müssen. Aendern sich die Spannungen stetig, so sind die Züge in den um den Punkt $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ liegenden Punkt

$$+\left(X+\frac{dX}{dx}dx\right)dy\,dz;\quad \left(Y+\frac{dY}{dy}dy\right)dx\,dz;$$
$$\left(Z+\frac{dZ}{dz}dz\right)dx\,dy.$$

Wirkt noch auf das betrachtete Element des Körpers eine äussere Kraft, welche auf die Masseneinheit reducirt f heissen mag, ist $\varDelta$ die Dichte des Körpers an der betrachteten Stelle, so geben die Summen der Componenten dieser Kräfte, welche gleich der Masse multiplicirt mit der Beschleunigung sein müssen

$$\begin{aligned}\frac{dX_x}{dx}+\frac{dY_x}{dy}+\frac{dZ_x}{dz}+\varDelta f_x&=\varDelta\frac{d^2x}{dt^2},\\ \frac{dX_y}{dx}+\frac{dY_y}{dy}+\frac{dZ_y}{dz}+\varDelta f_y&=\varDelta\frac{d^2y}{dt^2},\\ \frac{dX_z}{dx}+\frac{dY_z}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}+\varDelta f_z&=\varDelta\frac{d^2z}{dt^2},\end{aligned}\qquad (53)$$

wo f_x, f_y, f_z die Componenten von f nach den drei Coordinatenaxen bedeuten. Diese Gleichungen sind dieselben wie in (Nro. 195), in welchen hieraus h näher bestimmt ist.

273. Für das Gleichgewicht sind die Beschleunigungen Null, und man hat die weitere Bedingung, dass für drei sich schneidende Axen die statischen Momente gleich Null sein müssen, führt, wenn man diese Axen durch den Schwerpunkt des Hexaeders parallel den Kanten führt, wo sie also auch durch die Schwerpunkte je zweier Flächen des Hexaeders gehen, mit Weglassung der Unendlich kleinen der vierten Ordnung zu den Gleichungen

$$X_y=Y_x;\quad X_z=Z_x;\quad Y_z=Z_y. \qquad (54)$$

Es sind also in zwei sich rechtwinklich schneidenden Ebenen für

einen Punkt der Kante die Tangentialspannungen, welche je auf der andern Ebene rechtwinklich stehen, einander gleich.

Hiermit reduciren sich die neun Componenten der Spannungen, welche in den Gleichungen (53) vorkommen, auf sechs, nämlich die drei Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z und die drei tangentialen

$$X_y = Y_x; \; X_z = Z_x; \; Y_z = Z_y.$$

274. Denkt man sich durch den Punkt x, y, z drei mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen gelegt, und diese durch eine schiefe Ebene geschnitten, welche von den Kanten des gebildeten körperlichen Eckes die Längen dx, dy, dz abschneidet, so entsteht ein Tetraeder; bringt man in den Seiten dieses Tetraeders die Züge an, welche von den umliegenden Körpertheilen in diesen Seitenebenen ausgeübt werden, so muss dieses Tetraeder im Gleichgewichte bleiben, wenn der ganze Körper im Gleichgewichtszustande war.

Es sei n die Normale vom Punkte x, y, z auf die schiefe Ebene, über diese verlängert; s die Grösse der schiefen Begrenzungsfläche des Tetraeders; dann sind

$$s \cos(n, x); \; s \cos(n, y); \; s \cos(n, z)$$

die Projectionen der schiefen Endfläche des Tetraeders auf die zu x, y, z normalen Flächen, und also die zu diesen Richtungen normalen Seitenflächen des Tetraeders.

Für die Summe der an dem Tetraeder vorkommenden Züge in der Richtung von x hat man

$$-X_x s \cos(n, x) - Y_x s \cos(n, y) - Z_x s \cos(n, z) + s N_x,$$

wo N die Spannung in der zu n normalen Fläche s bedeutet.

Die Masse des Tetraeders ist ein Unendlichkleines der dritten Ordnung, wesshalb die auf die Masse des Tetraeders wirkende Kraft gegen die oben bestimmten Züge, welche mit s von der zweiten Ordnung sind, wegfällt. Für das Gleichgewicht des betrachteten Tetraeders erhält man so die erste von den drei folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
N_x &= X_x \cos(n,x) + Y_x \cos(n,y) + Z_x \cos(n,z), \\
N_y &= X_y \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) + Z_y \cos(n,z), \qquad \text{(a)} \\
N_z &= X_z \cos(n,x) + Y_z \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z).
\end{aligned}
$$

Diese drei Gleichungen bestimmen der Grösse und Richtung nach die Spannung N, welche im Punkte x, y, z in der zu n normalen Ebene stattfindet.

275. Aus X_x, X_y, X_z findet man die Componente der Spannung X nach der Richtung n gleich

$$X_n = X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z),$$

was, weil $X_y = Y_x$ und $X_z = Z_x$

ist, derselbe Ausdruck ist, welcher oben für N_x gefunden wurde. Es ist daher allgemein für je zwei Linien x und n, welche sich schneiden in dem Durchschnittspunkte

$$X_n = N_x.$$

276. Aus den Werthen von N_x, N_y, N_z findet man N^2 durch quadriren und addiren. Bemerkt man dabei, dass

$$X_x^2 + X_y^2 + X_z^2 = X^2$$

ist, und analoges für Y und Z gilt, so erhält man

$$
\begin{aligned}
N^2 = {} & X^2 \cos(n,x)^2 + Y^2 \cos(n,y)^2 + Z^2 \cos(n,z)^2 \\
& + 2(X_x Y_x + X_y Y_y + X_z Y_z) \cos(n,x)\cos(n,y) \qquad \text{(b)} \\
& + 2(X_x Z_x + X_y Z_y + X_z Z_z) \cos(n,x)\cos(n,z) \\
& + 2(Y_x Z_x + Y_y Z_y + Y_z Z_z) \cos(n,y)\cos(n,z).
\end{aligned}
$$

Legt man durch den Punkt x, y, z zwei Linien m und l rechtwinklich unter sich und auf n, so hat man für die Spannungen M und L in den zu m und l rechtwinklichen Ebenen analoge Ausdrücke; durch Addition findet man, weil z. B.

$$
\begin{aligned}
& \cos(n,x)\cos(n,y) + \cos(m,x)\cos(m,y) + \\
& + \cos(l,x)\cos(l,y) = \cos(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

ist, $$N^2 + M^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad \text{(c)}$$

Die Summe der Quadrate der Spannungen in drei unter sich rechtwinklichen Ebenen ist für deren Durchschnittspunkt constant, wie immer diese drei Ebenen um diesen Punkt gedreht werden.

277. Um die Spannung N durch eine geometrische Construction zu finden, trage man auf die Richtung n die vorläufig noch unbestimmte Länge n auf, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden sollen. Dann ist

$$\mathfrak{x} = n\cos(n,x); \quad \mathfrak{y} = n\cos(n,y); \quad \mathfrak{z} = n\cos(n,z).$$

Werden die Werthe dieser Cosinus in die Gleichung (b) substituirt, und mit n^2 multiplicirt, endlich aber die Länge n so bestimmt, dass

$$n^2 N^2 = 1$$

ist, so erhält man

$$1 = X^2\mathfrak{x}^2 + Y^2\mathfrak{y}^2 + Z^2\mathfrak{z}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{x}\mathfrak{z} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{y}\mathfrak{z}, \qquad \text{(d)}$$

wo die Coefficienten der doppelten Producte der Cosinus, welche in der Gleichung (b) vorkommen, der Reihe nach durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet sind.

Hier sind die Coefficienten X, Y, Z, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unabhängig von der Grösse und Richtung von n, also auch von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Die obenstehende Gleichung ist die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoides; die Spannung N ist die Reciproke des Halbmessers dieses Ellipsoides, welcher in der Richtung n liegt, also normal zu der Spannungsebene ist.

278. Die Normalspannung in der zu n normalen Ebene ist

$$N_n = N_x\cos(n,x) + N_y\cos(n,y) + N_z\cos(n,z),$$

was mit den oben gefundenen Werthen von N_x, N_y, N_z gibt

$$\begin{aligned} N_n = {} & X_x\cos(n,x)^2 + Y_y\cos(n,y)^2 + Z_z\cos(n,z) \\ & + 2X_y\cos(n,x)\cos(n,y) + 2X_z\cos(n,x)\cos(n,z) \qquad \text{(e)} \\ & + 2Y_z\cos(n,y)\cos(n,z). \end{aligned}$$

Die Summe der Normalspannungen in drei auf einander rechtwinklichen Ebenen findet man hiermit constant für den Durchschnittspunkt dieser Ebenen, wie sie auch um diesen Durchschnittspunkt gedreht werden.

279. Auch die Normalspannung lässt sich geometrisch construiren. Trägt man in der Richtung von n die vorläufig noch

unbestimmte Länge n auf, und bezeichnet wie oben die Projectionen von n auf die Coordinatenaxen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, setzt man

$$n^2 N_n = \pm 1,$$

so wird die Gleichung in der vorhergenden Nummer

$$\pm 1 = X_x \mathfrak{x}^2 + Y_y \mathfrak{y}^2 + Z_z \mathfrak{z}^2 + 2 X_y \mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2 X_z \mathfrak{x}\mathfrak{z} + 2 Y_z \mathfrak{y}\mathfrak{z}. \quad \text{(f)}$$

Das ist die Gleichung einer Fläche vom zweiten Grade auf ihren Mittelpunkt bezogen; der Halbmesser n dieser Fläche gibt die Normalspannung in der zu n normalen Ebene gleich

$$\pm \frac{1}{n^2},$$

wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem man in der obigen Gleichung das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat.

280. Eine Fläche vom zweiten Grade hat drei aufeinander rechtwinkliche Axen. Wählt man diese zu den Axen der x, y, z, so müssen in der Gleichung für die Fläche zweiten Grades die Glieder mit den Producten der Coordinaten wegfallen, also für diese Coordinaten

$$X_y = X_z = Y_z = 0$$

sein. Es finden also in den zu diesen Richtungen normalen Ebenen keine tangentialen Spannungen statt, oder die Spannungen stehen hier normal auf den Spannungsebenen, und fallen also mit den Normalspannungen für diese Ebene zusammen. Es gibt also in jedem Punkte eines Körpers drei aufeinander rechtwinkliche Ebenen, für welche die Tangentialspannungen Null sind, oder auf welchen die betreffenden Spannungen normal sind. Die Spannungen in diesen Ebenen nennt man die Hauptspannungen in dem betreffenden Punkte. Wir bezeichnen diese mit A, B und C und die Normalen zu den Ebenen der Hauptspannungen mit a, b, c.

281. Haben die drei Hauptspannungen einerlei Zeichen, sind sie alle positiv oder Spannungen im engeren Sinne, oder sind sie alle drei negativ, also Pressungen, so wird die obige Gleichung im ersten Falle

$$+1 = A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2,$$

im zweiten $$-1 = A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2,$$

und in beiden Fällen ist die Fläche ein Ellipsoid, dessen Halbaxen

$$\sqrt{\frac{1}{A}}; \quad \sqrt{\frac{1}{B}}; \quad \sqrt{\frac{1}{C}},$$

oder $$\sqrt{\frac{1}{-A}}; \quad \sqrt{\frac{1}{-B}}; \quad \sqrt{\frac{1}{-C}}$$

sind. Die Normalspannung N_n auf die zu n normale Ebene ist dann positiv oder negativ mit den Hauptspannungen zu gleich; es findet normal zu allen um x, y, z liegenden Ebenen entweder Spannung im engern Sinne statt, oder in allen Pressung; der Körper ist um den Punkt x, y, z entweder nach allen Richtungen ausgedehnt, oder er ist nach allen Richtungen zusammengedrückt.

Haben dagegen die Hauptspannungen verschiedene Zeichen, findet also nach den Richtungen der drei Axen theils Spannung, theils Pressung statt, so hat man zwei Flächen

$$+1 = A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2 \text{ und}$$
$$-1 = A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2.$$

Beides sind Hyperboloide, und die Normalspannung nach irgend einer Richtung n wird nun eine Spannung im engeren Sinne sein, oder eine Pressung, d. h. positiv oder negativ, je nachdem dieses n das erste oder das zweite Hyperboloid trifft.

Zwischen beiden Hyperboloiden liegt ein Conus, dessen Gleichung

$$0 = A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2$$

ist, und welchem beide Hyperboloide asymptotisch sind. Den Seiten dieses Kegels entspricht

$$N_n = 0.$$

Diese Seiten sind daher die Normalen zu Ebenen, in welchen, immer im Punkte x, y, z, der Spitze des Kegels, keine normale Spannung, sondern nur tangentiale vorkommt.

282. Bezieht man die Gleichung (b) auf die Axen der Hauptspannungen, so wird sie, weil hier

$$X_y = X_z = Y_z = 0$$

ist $$N^2 = A^2 \cos(n,a)^2 + B^2 \cos(n,b)^2 + C^2 \cos(n,c)^2, \quad (g)$$
und man sieht, dass das Ellipsoid (d) mit den Flächen der letzten Nummern dieselbe Lage der Axen hat, welche hier

$$\frac{1}{A}; \quad \frac{1}{B} \text{ und } \frac{1}{C}$$

sind.

283. Für die Componenten der Spannung nach den Richtungen der Hauptspannungen findet man aus (a)

$$N_a = A\cos(n,a); \; N_b = B\cos(n,b); \; N_c = C\cos(n,c). \quad (h)$$

Man findet also die Componente der Spannung in der zu n normalen Ebene nach der Richtung einer der Hauptspannungen, wenn man diese Hauptspannung auf die Richtung der Normalen n projicirt.

Hieraus ergibt sich noch eine zweite Construction für die Spannung N; man kann die drei Hauptspannungen A, B, C auf die Richtungen von n auftragen und auf die Richtungen a, b, c projiciren, dann aber die so erhaltenen

$$N_a, \quad N_b, \quad N_c$$

nach dem Kräfteparallelepiped zusammensetzen. Man sieht aber leicht, dass die so erhaltene Spannung N der Halbmesser eines Ellipsoides ist, dessen Axen A, B, C sind. Die Gleichung dieses Ellipsoides erhält man, indem man die drei Gleichungen

$$\cos(n,a) = \frac{N_a}{A}; \; \cos(n,b) = \frac{N_b}{B}; \; \cos(n,c) = \frac{N_c}{C}$$

quadrirt und addirt, was

$$1 = \frac{N_a^2}{A^2} + \frac{N_b^2}{B^2} + \frac{N_c^2}{C^2} \quad (k)$$

gibt. N_a, N_b, N_c sind hier die Coordinaten.

Dieses Ellipsoid nennt man gewöhnlich das Spannungsellipsoid. Man muss nicht vergessen, dass die hier erhaltene Spannung N nicht etwa zu einer Ebene gehört, die auf N normal ist, sondern zu einer, welche zu dem oben gebrauchten n normal ist, dessen Lage durch die drei oben stehenden Cosinus gegeben ist.

284. Die Normalspannung in der zu n normalen Ebene ist

$$N_n = N_a \cos(n,a) + N_b \cos(n,b) + N_c \cos(n,c)$$
$$= \frac{N_a^2}{A} + \frac{N_b^2}{B} + \frac{N_c^2}{C}. \qquad (k)$$

Die Gleichung der Spannungsebene ist, wenn man ihre Coordinaten von dem betrachteten Punkte x, y, z an zählt und gleich a, b, c setzt,

$$0 = a\cos(n,a) + b\cos(n,b) + c\cos(n,c),$$

was gibt
$$0 = \frac{aN_a}{A} + \frac{bN_b}{B} + \frac{cN_c}{C}.$$

Diese Ebene ist parallel zur tangirenden Ebene an die Fläche

$$\pm 1 = \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} \qquad (l)$$

an der Stelle, an der diese von N durchdrungen wird. Diese Fläche ist ein Ellipsoid, wenn A, B, C gleiche Zeichen haben, andernfalls erhält man zwei Hyperboloide, das eine mit einem das andere mit zwei Aesten wie oben in Nro. 281. Das Quadrat der Entfernung der tangirenden Ebene von dem Ursprunge ist die Normalspannung und diese ist positiv oder negativ, je nachdem zu der berührten Fläche + 1 oder − 1 in obiger Gleichung gehört. Das Quadrat der Entfernung des Berührungspunktes von dem Ursprunge ist

$$\frac{N^2}{N_n}$$

und N liegt in der Richtung dieses Halbmessers, so dass man also mit Hilfe dieser Construction alle hierher gehörenden Fragen beantworten kann.

285. Wie man aus der vorhergehenden Nummer sieht, stehen im Allgemeinen nur die drei Hauptspannungen auf ihren zugehörigen Ebenen normal; für jede andere Ebene ist die Spannung schief gegen die Ebene gerichtet, und gibt also eine tangentiale Componente. Soll die Spannung immer normal auf der Spannungsebene sein, so muss der Halbmesser der Fläche (l) immer zugleich eine Normale auf diese Fläche sein, was nur für die Kugelfläche der Fall ist, und diese erhält man nur, wenn

$$A = B = C,$$

die drei Hauptspannungen in dem betrachteten Punkte gleich gross sind. Dann aber sind alle Spannungen um diesen Punkt gleich gross. Dieser Satz lässt sich auch so ausdrücken: Sind rings um einen Punkt keine tangentialen Spannungen vorhanden, so sind die Spannungen rings um diesen Punkt unter sich gleich.

Sind zwei der Hauptspannungen A und B einander gleich, so wird das Spannungsellipsoid ein Rotationsellipsoid mit der Axe c. Dann sind die Spannungen in allen Ebenen durch den betrachteten Punkt, welche gleich geneigt gegen die c Axe sind, unter sich gleich, und die Spannungen in den Ebenen, welche durch c gehen, ebenso unter sich gleich und überdiess normal auf diesen Ebenen.

Hydrostatik.

286. Die Lehre vom Gleichgewichte der flüssigen Körper nennt man Hydrostatik. Bei ihr wird gewöhnlich definirt, ein flüssiger Körper sei ein solcher, bei dem die Theilchen frei neben einander beweglich seien, bei welchem also zwar normale Spannungen und Pressungen vorkommen können, nicht aber tangentiale. Eine solche Flüssigkeit kann man als eine vollkommene betrachten; die Flüssigkeiten, welche in der Natur vorkommen, entsprechen obiger Definition nur theilweise, wesshalb auch manche Erscheinungen bei ihnen den Folgerungen aus der obigen Definition nicht entsprechen.

287. Nach der obigen Definition der vollkommenen Flüssigkeit sind die Spannungen in einem Punkte A derselben in allen sich in A schneidenden Ebenen gleich gross (Nro. 285); es ist daher hier nicht mehr nothwendig, die Richtung dieser Ebenen zu bezeichnen. Ueberdiess kommen bei Flüssigkeiten nur ausnahmsweise positive Spannungen vor, sondern beinahe immer nur Pressungen. Wir bezeichnen daher hier die negative Spannung oder die Pressung der Flüssigkeit in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sein mögen durch einen Buchstaben p. Damit werden dann die Bedingungen des Gleichgewichtes in Nro. 262.

$$\frac{dp}{dx} = \Delta f_x; \quad \frac{dp}{dy} = \Delta f_y; \quad \frac{dp}{dz} = \Delta f_z, \tag{55}$$

wo Δ die Dichte der Flüssigkeit und f_x, f_y, f_z die Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden äusseren Kraft ist.

288. Die Pressung p kann beim Gleichgewichte nur von der Lage des Punktes x, y, z abhängen und muss sich daher als eine Function dieser Coordinaten ausdrücken lassen. Diess gibt die Bedingungen, dass Gleichgewicht möglich sei

$$\frac{d^2p}{dx\,dy} = \frac{d(\Delta f_x)}{dy} = \frac{d(\Delta f_y)}{dx},$$

$$\frac{d^2p}{dx\,dz} = \frac{d(\Delta f_x)}{dz} = \frac{d(\Delta f_z)}{dz},$$

$$\frac{d^2p}{dy\,dz} = \frac{d(\Delta f_y)}{dz} = \frac{d(\Delta f_z)}{dy}.$$

Diese Gleichungen sagen, dass Δf eine Function von x, y, z sein müsse. Ist die Dichte der Flüssigkeit constant, so sagen die Gleichungen, es muss die Kraft, welche auf die Masseneinheit einwirkt, eine Function von x, y, z sein, es muss also eine Kraftfunction (Nro. 229) für diese Kraft existiren.

Ist dagegen die Kraft constant, so muss die Dichte sich als eine Function von x, y, z ausdrücken lassen. Ist z. B. die äussere Kraft die Schwerkraft, ist z vertical abwärts gerichtet, so hat man

$$\frac{dp}{dx} = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 0; \quad \frac{dp}{dz} = \Delta g;$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt p unabhängig von x und und y, also allein abhängig von z. Die dritte Gleichung zeigt hiermit, dass auch Δ nur eine Function von z sein kann, dass also Δ in einer horizontalen Ebene einen constanten Werth haben muss, der aber von einer horizontalen Schichte zur andern ein anderer sein kann. Da aber Δ nur von der Pressung und der Temperatur abhängt, und auch die erste in einer horizontalen Schichte constant ist, so folgt, dass Gleichgewicht in einer schweren Flüssigkeit nur bestehen kann, wenn die Temperatur in jeder horizontalen Schichte constant ist, während sie von einer zur andern sich ändern kann.

289. Die Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = \Delta f_x \text{ oder } dp = \Delta f_x dx,$$

welche die Aenderung der Pressung der Flüssigkeit in der Richtung x gibt, sagt, diese Aenderung sei für die Strecke dx gleich der nach x zerlegten Kraft, welche die Schichte Flüssigkeit von dem Querschnitte eins und der Länge dx in dieser Richtung antreibt, wobei die Kraft und die Dichte der Flüssigkeit überall gleich der im Punkte x, y, z genommen wird.

Die Richtung x ist hierbei ganz willkührlich; nimmt man dx, so dass

$$dp = \Delta f_x dx = 0$$

wird, oder dass sich die Pressung in der Richtung dx auf diese Länge nicht ändert, so muss f_x Null sein, also f selbst rechtwinklich auf dx stehen. Geht man von dem Punkte x, y, z ringsherum zu solchen Punkten, in welchen p denselben Werth hat, so beschreibt man um x, y, z ein Flächenelement, in welchem die Pressung dieselbe bleibt, und auf welchem die Kraft f, welche die Flüssigkeitstheilchen angreift, nach dem obigen normal stehen muss. Eine solche Fläche, in welcher die Pressung überall denselben Werth hat, nennt man eine Gleichgewichtsfläche, oder gewöhnlicher eine Niveaufläche. Sie steht also in jedem Punkte normal auf der das Element der Flüssigkeit bei diesem Punkte angreifenden Kraft.

Geht man von einer Niveaufläche zu einer andern, nächstliegenden, ist in der ersten die Pressung p, in der zweiten p + dp; nimmt man ds in der Richtung der Kraft f, so hat man

$$\frac{dp}{ds} = \Delta f \text{ oder } dp = \Delta f ds.$$

Der Abstand beider Niveauflächen ist daher dem Producte Δf umgekehrt proportional, oder wenn Δ constant ist, der Kraft f. Die Fläche der grösseren Pressung liegt in der Richtung der Kraft, die Fläche der kleineren dem entgegen.

In der Regel ist der Druck auf die freie Oberfläche einer Flüssigkeit überall derselbe, diese also eine Niveaufläche.

Aufgaben über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

Gleichgewicht einer schweren tropfbaren Flüssigkeit.

290. Die Pressung. Die tropfbaren Flüssigkeiten sind sehr wenig zusammendrückbar. In der Regel vernachlässigt man bei ihnen die von ihrer Zusammendrückbarkeit herrührende Aenderung der Dichte.

Nimmt man die Axe der z vertical abwärts, die der x und y aber horizontal, setzt man voraus, dass ausser der Schwere keine andere Kraft wirkt, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dp}{dx} = 0; \ \frac{dp}{dy} = 0; \ \frac{dp}{dz} = \Delta g.$$

Das allgemeine Integral der letzten Gleichung ist

$$z = \Delta g z + F_{x,y}$$

wo $F_{x,y}$ eine willkührliche Function von x und y bedeutet. Die beiden ersten Gleichungen zeigen aber, dass p nach x und nach y constant ist; diese willkührliche Function reducirt sich also durch die beiden ersten Gleichungen auf eine Constante; hiernach ist

$$p = \Delta g z + p_0,$$

wo p_0 die Constante sein soll. Sie ist die Pressung der Flüssigkeit in der Horizontalebene $z = 0$.

Dieser Ausdruck von p zeigt, dass die Pressung in einer horizontalen Schichte überall dieselbe sei, dass die horizontalen Flächen Niveauflächen für die schwere Flüssigkeit sind. Ist eine freie Oberfläche vorhanden, in welcher etwa durch die Luft ein constanter Druck auf diese Oberfläche stattfindet, so ist die Pressung in dieser Oberfläche gleich jenem Drucke für die Flächeneinheit. Diese Oberfläche ist dann horizontal. Ist aber der Druck auf die Oberfläche nicht constant, so ist auch die freie Oberfläche nicht horizontal.

291. Gehört der Punkt x, y, z der begrenzenden Gefässwand an, so ist die Pressung p dort durch die obige Formel gegeben. Im Punkte x, y, z findet auf die Gefässwand nach der

normalen auf sie ein Druck statt, welcher für die Einheit der Fläche gleich p ist. Diesem Drucke muss die Wand durch ihre Festigkeit widerstehen, wenn die Flüssigkeit in dem Gefässe in Ruhe bleiben soll.

292. Im Vorstehenden ist die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit nicht beachtet; bei sehr hohen Flüssigkeitssäulen kann man diese aber nicht immer vernachlässigen.

Wird ein Volumen v_1 einer Flüssigkeit durch die allseitig angebrachte Pressung 1 in das Volum $v_1\,(1-\delta)$ gebracht, ist Δ_1 die Dichte dieser Flüssigkeit vor der Zusammendrückung und Δ nach dieser, so ist

$$v_1\,\Delta_1 = v_1\,(1-\delta)\,\Delta, \text{ woraus}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{1-\delta} \text{ oder nahe } \Delta_1\,(1+\delta),$$

da δ bei tropfbaren Flüssigkeiten immer sehr klein ist.

Die Physik lehrt nun, dass diese Flüssigkeit unter die allseitige Pressung p gebracht, das Volumen $v_1\,(1-p\,\delta)$ annimmt, woraus ihre Dichte

$$\Delta = \Delta_1\,(1+p\,\delta)$$

sich ergibt.

Damit wird die dritte der Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dp}{dz} = \Delta_1\,(1+p\,\delta)\,g,$$

woraus

$$\frac{1}{\delta}\ln(1+p\,\delta) = \Delta_1\,g\,z + \text{Const.}$$

Ist der Druck für $z=0$ gleich p_0, so erhält man

$$\frac{1}{\delta}\ln\frac{1+p\,\delta}{1+p_0\,\delta} = \Delta_1\,g\,z,$$

woraus

$$p = \frac{(1+p_0\,\delta)\,e^{\Delta_1 g z \delta} - 1}{\delta}.$$

Da δ immer sehr klein ist, so kann man setzen

$$e^{\Delta_1 g z \delta} = 1 + \Delta_1\,g\,z\,\delta + \frac{1}{2}(\Delta_1\,g\,z\,\delta)^2,$$

womit wird

$$p = p_0 + (1 + p_0 \delta) \Delta_1 g z + \frac{1}{2}(1 + p_0 \delta) \Delta_1{}^2 g^2 z^2 \delta.$$

Es ist aber $(1 + p_0 \delta) \Delta_1$ die Dichte der Flüssigkeit unter dem Drucke p_0; bezeichnet man diese durch Δ_0 und vertauscht man in dem sehr kleinen letzten Gliede einmal Δ_1 mit Δ_0, was nur einen Fehler in den Gliedern mit den höheren Potenzen von δ gibt, so wird die Formel

$$p = p_0 + \Delta_0 g z + \frac{1}{2} \Delta_0{}^2 g^2 z^2 \delta.$$

Druck auf ein ebenes Stück der Gefässwand.

293. Ist da ein Element dieser ebenen Wandfläche in der Tiefe z unter der Oberfläche der Flüssigkeit, ist p_0 die Pressung in dieser Oberfläche; so ist, wenn man die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit vernachlässigt, der Druck der Flüssigkeit auf das Element da

$$(p_0 + \Delta g z) da.$$

Dieser Druck geht normal auf die Wandfläche, und also für alle Elemente der ebenen Wandfläche parallel. Der Druck D auf die ganze Wandfläche ist.

$$D = \int (p_0 + \Delta g z) da = p_0 a + \Delta g z_0 a,$$

wenn z_0 die Tiefe des Schwerpunktes der Wandfläche unter der Oberfläche der Flüssigkeit ist, und a die Grösse der Wandfläche.

Um den Angriffspunkt der Resultirenden dieses Drucks zu finden, sei b die horizontale Breite der Fläche bei der Ordinate z; s die in der Neigungslinie der Ebene von ihrem Schwerpunkte abwärts gemessene Ordinate eines Punktes, der in der Tiefe z unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegt; dann ist der Druck auf das Element $b ds$ der Ebene gleich

$$(p_0 + \Delta g z) b ds$$

und das statische Moment dieses Drucks in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt in der Ebene gezogene Horizontallinie

$$s (p_0 + \Delta g z) b ds,$$

womit, wenn man s_1 die Ordinate des Angriffspunktes der Resultirenden, des **Mittelpunktes des Drucks** nennt

$$D s_1 = \int (p_0 + \varDelta g z) s b d s,$$

das Integral über die ganze Ebene ausgedehnt.

Ist nun α der Neigungswinkel der Ebene gegen die Verticale, so ist

$$z = z_0 + s \cos \alpha,$$

damit wird

$$D s_1 = \int (p_0 + \varDelta g z_0 + \varDelta g s \cos \alpha) s b d s =$$

$$= (p_0 + \varDelta g z_0) \int s b d s + \varDelta g \cos \alpha \int s^2 b d s.$$

Das erste Integral ist Null, weil s vom Schwerpunkte der Ebene an gerechnet ist; beim zweiten Integral ist jedes Element der Fläche, $b d s$ multiplicirt mit dem Quadrate seiner Entfernung von der gebrauchten Axe der Momente. Dieses wäre, wenn $b d s$ ein Massenelement wäre, das Trägheitsmoment dieser Masse. Man trägt nun den Namen Trägheitsmoment auf alle in gleicher Weise gebildete Producte, ob Massen oder nicht, über, und nennt also auch das zweite Integral das Trägheitsmoment der ebenen Fläche für die in ihr horizontal durch den Schwerpunkt gehende Axe. Dieses heisse Q, dann ist

$$D s_1 = \varDelta g Q \cos \alpha.$$

Für den Werth von s_1 hat man damit

$$s_1 = \frac{\varDelta g Q \cos \alpha}{(p_0 + \varDelta g z_0) a}.$$

Ist $p_0 = 0$, so wird diess

$$s_1 = \frac{Q \cos \alpha}{a z_0}.$$

Für ein Reckteck, dessen Länge in der Richtung der Neigungslinie l ist, während die eine Seite horizontal liegt, findet man

$$s_1 = \frac{1}{12} \frac{l^2 \cos \alpha}{z_0},$$

für einen Kreis vom Halbmesser r

$$s_1 = \frac{r^2 \cos \alpha}{4 z_0}.$$

Druck der schweren Flüssigkeit auf die Wand des Gefässes nach einer bestimmten Richtung.

294. Ist da ein Element der irgendwie gestalteten Wandfläche, welche eine Flüssigkeit begrenzt, so ist der nach der Normalen auf da gerichtete Druck der schweren Flüssigkeit auf dieses Element

$$(p_0 + \Delta g z) da,$$

wenn z die Tiefe dieses Elementes unter der Oberfläche der Flüssigkeit bedeutet und p_0 den Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche. Zerlegt man diesen Druck nach einer horizontalen Richtung, die x heissen mag, so ist seine Componente nach x

$$(p_0 + \Delta g z) da . \cos(n, x),$$

wo (n, x) der Winkel der nach aussen gerichteten Normalen mit der Richtung x bedeuten soll. $da . \cos(n, x)$ ist die positiv oder negativ genommene Projection des Elementes da auf eine zu x normale Ebene y, z, je nachdem (n, x) ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Denkt man sich nun einen Cylinder, dessen Seiten parallel x sind, und dessen Querschnitt gleich dem absoluten Werthe von $da \cos(n, x)$, durch das Gefäss gelegt; geht man in diesem von einem Punkte ausserhalb des Gefässes zuerst in dieses, wo beim Eintritt der Cylinder eben das genannte Element da aus der Gefässwand ausschneidet, während n die Normale für dieses Element bezeichnet, so ist hier (n, x) ein stumpfer Winkel, und daher die Componente des Drucks auf dieses Element negativ und gleich

$$(p_0 + \Delta g z) da \cos(n, x).$$

Beim Weiterfortgehen in diesem Cylinder wird man an die Stelle kommen, an welcher er aus dem begrenzten Gefässe austritt; ist das Element, das er aus der Gefässwand hier ausschneidet, gleich da' und n' die Normale auf dieses Element, so ist die Componente des Drucks auf die Gefässwand nach x für diese Stelle

$$(p_0 + \Delta g z) da' \cos(n', x).$$

Aber (n', x) ist beim Austreten nothwendig spitz, daher diese Componente positiv, und weil

$$da' \cos(n' x)$$

ebenfalls die Grösse des Querschnitts des Cylinders ist

$$(p_0 + \Delta g z) \, d a \cos(n, x) + (p_0 + \Delta g z) \, d a' \cos(n', x) = 0.$$

Sollte für das weitere Fortgehen in dem Cylinder ein abermaliges Eintreten in das Gefäss stattfinden, so wird diesem ein abermaliges Austreten folgen, und die Summe der Drücke auf diese beiden Elemente der Wand in der Richtung der x abermals Null sein.

Denkt man sich aber durch die ganze Masse solche mit x parallele Cylinder gelegt, so sieht man, dass sich alle Drücke auf die feste Wand des Gefässes nach x zerlegt, paarweise aufheben, also der Druck der Flüssigkeit auf die ganze Grenzwand in der Richtung von x gleich Null ist.

Ein irgend wie gestaltetes Gefäss mit einer festen Wand wird daher durch die in demselben befindliche Flüssigkeit nach keiner horizontalen Richtung hin gedrückt.

Denkt man sich ebenso verticale Cylinder durch die Flüssigkeit gelegt, und tritt einer von diesen durch die freie Oberfläche ein, und in der Tiefe z wieder aus, wo er das Element $d a$ aus der Wandfläche ausschneidet, so ist der verticale Druck auf dieses Element

$$(p_0 + \Delta g z) \, d a \cos(n, z).$$

$d a \cos(n, z)$ ist hier die Horizontalprojection von $d a$, also der Querschnitt des Cylinders und $\Delta g z \, d a \cos(n, z)$ das Gewicht der in diesem Cylinder befindlichen Flüssigkeitsmasse. Ist p_0 der Druck etwa der atmosphärischen Luft, welche das Gefäss rings umgibt, und vernachlässigt man den Unterschied von p_0 in verschiedenen Höhen, so wird auf die Aussenseite des Gefässes, so weit dieses in den betrachteten Cylinder fällt, der Druck der Atmosphäre

$$p_0 \, d a \cos(n, z)$$

von unten nach oben sein, welcher den entsprechenden Druck von oben nach unten aufhebt. Durch die Flüssigkeit selbst wird daher auf das betrachtete Element ein verticaler Druck abwärts ausgeübt, welcher dem Gewichte der Flüssigkeit in dem Gefässe vertical über diesem Elemente gleich ist.

Tritt der Cylinder erst in der Tiefe z_1 in das Gefäss und bei z_2 wieder aus, sind $d a_1$ und n_1; $d a_2$ und n_2 die Elemente der Gefässwand und die Normalen auf diese Elemente beim Ein- und

Austritt, so ist der verticale Druck der Flüssigkeit auf diese beiden Elemente zusammen

$$\varDelta g z_1 \, d\varphi_1 \cos(n_1, z) + \varDelta g z_2 \, d a_2 \cos(n_2, z).$$

Nun ist $d a_1 \cos(n_1, z)$ der negativ genommene und $d a_2 \cos(n_2, z)$ der positive Querschnitt des betrachteten Cylinders, welcher dq heissen soll; daher obiger Druck

$$\varDelta g (z_2 - z_1) \, dq$$

d. h. das Gewicht der in dem Gefässe innerhalb des betrachteten Cylinders befindlichen Flüssigkeit, wie bei dem zuerst betrachteten Falle. Es ist daher der verticale Druck aller in dem Gefässe befindlicher schwerer Flüssigkeit gleich dem Gewichte dieser Flüssigkeit. Auch geht aus den Betrachtungen hervor, dass die Resultirende dieses Drucks durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit in dem Gefässe geht.

Dasselbe Resultat erhält man begreiflich in viel einfacherer Weise durch andere Betrachtungen.

Der Auftrieb einer schweren Flüssigkeit.

295. Betrachtet man in gleicher Weise, wie in der vorhergehenden Nummer, den Druck auf einen in der Flüssigkeit befindlichen festen Körper, so findet man, dass dieser nach irgend einer horizontalen Richtung hin keinen Druck erleidet, dass er aber vertical aufwärts einen Druck erleidet, welcher gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den Raum des Körpers erfüllen würde, wenn dieser ganz untergetaucht ist, oder welcher den Raum des untergetauchten Theils des Körpers erfüllen würde, diesen durch eine horizontale Ebene in der Oberfläche der Flüssigkeit abgeschnitten. Diesen Druck vertical aufwärts nennt man den Auftrieb der Flüssigkeit, und drückt obigen Satz gewöhnlich so aus; der Auftrieb einer Flüssigkeit auf einen eingetauchten Körper ist gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit.

Man sieht zugleich aus den obigen Betrachtungen, dass der Auftrieb einer Flüssigkeit durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit geht.

Gleichgewicht in schweren rotirenden tropfbaren Flüssigkeiten.

296. In einem cylindrischen Gefässe mit verticaler Axe befindet sich eine um diese mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω rotirende schwere Flüssigkeit; die Bedingungen des Gleichgewichts für diese Flüssigkeit anzugeben.

Nimmt man ein Coordinatensystem an, das um die verticale Axe der z, welche mit der Axe des Gefässes zusammenfallen soll, mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirt, so ist die Flüssigkeit für dieses Axensystem in relativer Ruhe. Um die Bedingungen dieser relativen Ruhe zu erhalten, hat man nach (Nro. 138) zu den Kräften, welche ein Element dm in der Entfernung r von der Drehaxe angreifen, die Centrifugalkraft $d m r \omega^2$ in der Richtung von r hinzuzufügen. Damit werden die Gleichungen für die Pressung der Flüssigkeiten an der Stelle z, r

$$\frac{dp}{dz} = \Delta g; \quad \frac{dp}{dr} = \Delta r \omega^2.$$

Die erste Gleichung gibt

$$p = \Delta g z + F_r; \text{ die zweite } p = \frac{1}{2} \Delta r^2 \omega^2 + F_z;$$

wo F_r und F_z willkührliche Functionen, respective von r und von z sind, welche je durch die andere Gleichung bestimmt werden. So erhält man

$$p = p_0 + \Delta g z + \frac{1}{2} \Delta r^2 \omega^2,$$

wo p_0 die Pressung in der Axe bei $z = 0$ ist.

Für eine Niveaufläche hat man $p - p_0$ constant; die Gleichung gibt als Meridiancurve der Niveaufläche eine Parabel mit der Axe z, deren Scheitel in der Tiefe

$$z = \frac{p - p_0}{\Delta g}$$

liegt, und deren Parameter

$$\frac{g}{\omega^2}$$

um so grösser ist, je kleiner die Winkelgeschwindigkeit ist.

Ist für die Oberfläche $p = p_0$ constant, so ist die Gleichung dieser

$$r^2 = -\frac{2g}{\omega^2} z.$$

Sind zwei Flüssigkeiten übereinander, welche mit verschiedener Geschwindigkeit um dieselbe Axe rotiren, so muss in jeder die Gleichung (a) bestehen, nur kann die Constante in der zweiten Flüssigkeit einen andern Werth haben, als in der ersten. Ist Δ die Dichte der oberen Flüssigkeit, ω ihre Winkelgeschwindigkeit, und p_0 der Druck in ihr bei $z = 0$ und $r = 0$, so ist für sie

$$p = p_0 + \Delta g z + \frac{1}{2} \Delta r^2 \omega^2.$$

Sind für die zweite, untere Flüssigkeit Δ_1 und ω_1 die Dichte und die Winkelgeschwindigkeit, so ist in ihr

$$p = \Delta_1 g z + \frac{1}{2} \Delta_1 r^2 \omega_1^2 + \text{Const.}$$

Für die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten müssen die Pressungen sich aus beiden Gleichungen identisch ergeben; sind daher z_1 und r_1 die Coordinaten der Trennungsfläche, so hat man

$$(p_0 - \text{Const}) = (\Delta_1 - \Delta) g z_1 + \frac{1}{2} r_1^2 (\Delta_1 \omega_1^2 - \Delta \omega^2).$$

Ist noch z_1 für $r_1 = 0$ gleich z'_1, so wird

$$0 = (\Delta_1 - \Delta) g (z'_1 - z_1) - \frac{1}{2} r_1^2 (\Delta_1 \omega_1^2 - \Delta \omega^2),$$

welches die Gleichung der Meridiancurve der Trennungsfläche ist. Man sieht, diese ist eine Parabel mit der Axe z, deren Scheitel bei z'_1 liegt, und deren Parameter

$$\frac{\Delta_1 - \Delta}{\Delta_1 \omega_1^2 - \Delta \omega^2}$$

ist. Dabei ist die Parabel nach oben oder nach unten gekehrt, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, was von den Drehgeschwindigkeiten der Flüssigkeiten abhängt.

Druck auf einen in die rotirende Flüssigkeit gesenkten Körper.

297. Ist in die rotirende Flüssigkeit ein Körper gesenkt, so erleidet der Auftrieb auf ihn durch die Rotation der Flüssigkeit

um eine verticale Axe keine Aenderung, wie man sich leicht durch die Betrachtung eines cylindrischen verticalen Elementes überzeugt.

Zerlegt man ferner den Körper in horizontale, parallelepipedische Elemente, deren Seiten parallel mit x gehen, von welchen wir eines betrachten, das bei y, z liegt, und den Querschnitt d y d z hat, für welches ferner x_1 und x_2 die Coordinaten des Eintritts in den Körper und des Austritts aus diesem sind, so ist die Componente des Drucks der rotirenden Flüssigkeit auf die Aussenfläche dieses Elementes in der Richtung von x

$$- \left(p_0 + \varDelta g z + \frac{1}{2} \varDelta (x_2{}^2 + y^2) \omega^2\right) d y d z +$$

$$+ \left(p_0 + \varDelta g z + \frac{1}{2} \varDelta (x_1{}^2 + y^2) \omega^2\right) d y d z =$$

$$= - \frac{1}{2} \varDelta (x_2{}^2 - x_1{}^2) \omega^2 d y d z =$$

$$= - \varDelta (x_2 - x_1) d y d z \frac{x_2 + x_1}{2} \omega^2,$$

d. h. gleich der negativ genommenen Componente nach x der Centrifugalkraft, welche der das Volumen dieses Elementes erfüllenden Flüssigkeitsmasse

$$\varDelta (x_2 - x_1) d y d z$$

zukommen würde, wenn sie in dem Mittelpunkte dieses Elementes oder in der Entfernung

$$\sqrt{\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)^2 + y^2}$$

von der Drehaxe entfernt wäre.

Nennt man die Masse des betrachteten Elementes d m; x′ die Entfernung seines Mittelpunktes von der Ebene y, z, so ist die oben berechnete Componente des Drucks

$$- x' d m \omega^2,$$

und diess gibt für die Summe dieser Componenten nach x für den ganzen Körper

$$- \omega^2 \int x' d m = - \omega^2 m x_0,$$

wenn x_0 die Coordinate des Schwerpunktes der den Raum des Körpers gleichmässig erfüllenden Flüssigkeit, und m die Masse dieser Flüssigkeit bedeutet.

Setzt man diese Componenten zu einer Kraft X zusammen, so liegt der Angriffspunkt dieser Kraft bei den Coordinaten y' und z', welche durch

$$-\omega^2 \int x' y \, dm = -\omega^2 m x_0 y' \text{ und}$$

$$-\omega^2 \int x' z \, dm = -\omega^2 m x_0 z'$$

bestimmt sind.

Ebenso findet man die Componente des Drucks auf den Körper in der Richtung der y Axe

$$Y = -\omega^2 m y_0,$$

wo y_0 die Entfernung des Schwerpunktes der den Körper gleichförmig erfüllenden Masse m von der Ebene xz ist; die Coordinaten x'' und z'' des Angriffspunktes von Y ergeben sich aus

$$\int y' x \, dm = m y_0 x'' \text{ und } \int y' z \, dm = m y_0 z''.$$

Legt man die Axe der x durch den Schwerpunkt des gleichförmig mit Masse erfüllten Volums des Körpers, so ist $Y = 0$, aber die Momente von Y werden nicht gleich Null, wenn nicht die Axe der y eine Hauptaxe des gleichförmig dichten Körpers ist. Im Allgemeinen wird sich daher der Druck der rotirenden Flüssigkeit reduciren auf eine Kraft X, welche den Körper in der Richtung von seinem Schwerpunkte durch die Axe z gegen diese hintreibt, und in ein Kräftepaar, welches den Körper um seinen Schwerpunkt zu drehen strebt.

Sind die Axen x, y, z Hauptaxen des Körpers, so geht der Druck der Flüssigkeit durch den Schwerpunkt des gleichförmig dicht erfüllten Volums des Körpers.

Nimmt der Körper an der Rotation um die z Axe Theil, was jedenfalls durch den Stoss der Flüssigkeit, der oben nicht beachtet ist, eintreten wird, so wirkt auf den Körper seine eigene Centrifugalkraft gleich $m_1 r_1 \omega^2$, wenn m_1 die Masse des Körpers r_1 die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe der z ist. Ist der

Körper homogen, so ist r_1 gleich dem oben gebrauchten x_0. Neben dieser Kraft wirkt auch hier ein Kräftepaar unter denselben Umständen, wie oben.

Nimmt man den einfacheren Fall, dass die Kräfte durch den Schwerpunkt des homogenen Körpers gehen, so wird dieser durch die Kraft

$$(m_1 - m) r_1 \omega^2$$

von der Axe weggetrieben. Bezeichnet man das Volumen des Körpers mit V, die Dichte mit Δ_1 und die der Flüssigkeit wie bisher mit Δ, so lässt sich dieser Ausdruck durch

$$V(\Delta_1 - \Delta) r_1 \omega^2$$

ersetzen.

Diese Kraft, welche man bei der Aufbereitung der Erze verwendet, ist also proportional dem Volumen, der Differenz der Dichten und dem Quadrate der Rotationsgeschwindigkeit, und kann durch Erhöhung der letztern bis zu sehr grossen Werthen, selbst bei geringen Differenzen der specifischen Gewichte gesteigert werden.

Kommt ein Körper in die rotirende Flüssigkeit, so wird er von dieser zuerst gegen die Axe gezogen, bis er durch den Stoss der Flüssigkeit eine hinreichende Rotationsgeschwindigkeit erhalten hat. Ist seine Dichte grösser, als die der Flüssigkeit, so wird er dann wieder mit beschleunigter Bewegung von der Axe weggeworfen, während der weniger dichte Körper in der Axe bleibt. Diess die bekannte Erscheinung bei Wirbeln.

Die Pressung in einer tropfbarflüssigen Kugel, deren Theile gegenseitig gravitiren.

298. Ist p die Pressung in einem Punkte A in der Entfernung r vom Mittelpunkte einer Kugel aus tropfbarer Flüssigkeit, deren Theile sich umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes anziehen, der allgemeinen Gravitation unterworfen sind, ist V die Potentialfunction in dem Punkte A und Δ die Dichte der Flüssigkeit an dieser Stelle, so wird eine der Gleichungen (55, Nro. 287).

$$\frac{dp}{dr} = -\Delta \frac{dV}{dr},$$

woraus, wenn Δ als constant betrachtet wird

$$p - p_0 = \Delta(V_0 - V)$$

sich ergibt, wo p_0 die Pressung an der Stelle ist, an welcher die Potentialfunction den Werth V_0 hat.

Für eine homogene Kugel vom Halbmesser R ist die Potentialfunction hier

$$V = -2\pi f \Delta (R^2 - r^2) - \frac{4\pi f \Delta}{3} r^2,$$

wo f die Constante der Gravitation ist; das negative Zeichen entspricht der Anziehung.

Ist p_0 die Pressung an der Oberfläche, constant, so ist

$$V_0 = -\frac{4}{3}\pi f \Delta R^2$$

und damit

$$p = p_0 + \frac{2}{3}\pi f \Delta^2 (R^2 - r^2),$$

was für den Mittelpunkt der Kugel die Pressung

$$p = p_0 + \frac{2}{3}\pi f \Delta^2 R^2$$

gibt.

Für die Erdoberfläche haben wir für die Anziehung der Einheit der Masse durch die Erde die beiden Ausdrücke (m_1 die Masse, R_1 der Halbmesser der Erde)

$$\frac{f m_1}{R_1{}^2} = g + x w^2 \cos\beta, \quad \text{(vgl. Nro. 140)}$$

oder wenn man die Masse m_1 der Erde gleich

$$\frac{4}{3}\pi R_1{}^3 \Delta_1$$

setzt, wo Δ_1 die mittlere Dichte der Erde ist, und wenn man $g + x w^2 \cos\beta$ durch g_1 bezeichnet

$$\frac{4}{3}\pi f \Delta_1 R_1 = g_1.$$

Substituirt man den Werth der Gravitationsconstante hieraus in den obigen Ausdruck für die Pressung, so findet man

$$p = p_0 + \frac{\varDelta^2 R^2 g_1}{2 \varDelta_1 R_1}.$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, dass die Zunahme der Pressung im Innern der Kugel nur dann erheblich wird, wenn der Halbmesser der Kugel beträchtlich gegen den Erdhalbmesser wird. Für eine Wasserkugel vom Halbmesser 1000 Meter, hat man nahe

$$\frac{\varDelta}{\varDelta_1} = \frac{1}{5,6}; \quad \frac{R}{R_1} = \frac{1000 . 2\pi}{40\,000\,000}$$

und findet damit $\quad p = p_0 + 0{,}014 \varDelta g_1$,

was sagt, der Druck nimmt von aussen bis zum Mittelpunkte um den Druck einer schweren Wassersäule von 0,014 Meter Höhe zu.

Gleichgewicht einer elastischen Flüssigkeit.

299. Elastische Flüssigkeiten, Gase, Dämpfe befolgen mehr oder minder genau das Boyle-Gay Lussac'sche Gesetz, wonach

$$p = k \varDelta (a + \theta) \tag{a}$$

ist, wo p die Pressung des Gases, $\varDelta$ seine Dichte, θ die Temperatur, k und a aber Constanten sind. Ist die Temperatur in Graden nach der Skale von Celsius angegeben, so ist a sehr nahe für alle Gase gleich 273. Der Werth von R bestimmt sich aus folgendem. Unter einem Drucke, der gleich dem einer Quecksilbersäule von 0,760 Meter Höhe und 0° Temperatur ist, ist die Masse der in einem Kubikmeter enthaltenen atmosphärischen Luft von 0° Temperatur nach den Bestimmungen von Regnault 1,2932 Kilogramm. Setzt man also in obiger Formel $\theta = 0$; $\varDelta = 1{,}2932$; und nimmt somit das Meter als Längeneinheit, so ist p gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule von $0^m{,}760$ Höhe und einem Quadrameter Querschnitt, was gleich

$$13{,}596 \times 1000 \times 0{,}760 \times g$$

ist. Damit erhält man für atmosphärische Luft

$$k = 29{,}272 . g.$$

Für ein Gas, das bei gleicher Pressung und gleicher Temperatur s mal so dicht ist, als atmosphärische Luft, dessen specifisches Gewicht gegen atmosphärische Luft s ist, findet man

$$k = \frac{29{,}272 . g}{s}.$$

Diesen Zahlen liegt das Meter als Längeneinheit und das Kilogramm als Einheit der Masse zu Grunde.

Pressung in ruhender schwerer Luft von constanter Temperatur.

300. Nimmt man die Coordinatenaxe der z vertical aufwärts, die der x und y aber horizontal, nimmt man an, die Schwerkraft könne in dem betrachteten Raume als überall gleich gross und parallel betrachtet werden, so ist, wenn p die Pressung der Luft bei x, y, z ist, die Dichte aber Δ

$$\frac{dp}{dx} = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 0; \quad \frac{dp}{dz} = -\Delta g.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben p constant nach x und y; die dritte gibt mit der Gleichung (a) der vorhergehenden Nummer

$$k(a+\theta)\frac{\frac{dp}{dz}}{p} = -g,$$

$$k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p} = gz, \qquad \text{(b)}$$

wenn p_0 die Pressung der Luft bei $z = 0$ ist.

Die Pressung ist also in jeder horizontalen Schichte constant, und nimmt nach oben nach dem Gesetze der vorstehenden Formel ab, um so langsamer je grösser θ ist.

Gleichgewicht der mit der Erde rotirenden Atmosphäre.

301. Man hat hier zu der Anziehung, welche von der Erde auf ein Theilchen der Atmosphäre ausgeübt wird, für die relative Ruhe der Atmosphäre gegen ein mit der Erde fest verbundenes Axensystem die an diesem Theilchen wirkende Centrifugalkraft als entgegengesetzte Führungskraft zuzusetzen, worauf die Gleichungen (Nro. 287) unverändert bleiben. Nimmt man den Ursprung der Coordinaten im Mittelpunkte der Erde, legt die Axe der z in die Richtung der Erdaxe, x und y rechtwinklich darauf, so sind mit

der Umdrehungsgeschwindigkeit w der Erde die Componenten der Centrifugalkraft für die Masseneinheit an dem Orte x, y, z nach den drei Axen

$$xw^2, \; yw^2 \text{ und } 0.$$

Ist die Potentialfunction der Masse der Erde in dem Punkte x, y, z gleich V, $\varDelta$ die Dichte und p die Pressung der Luft an dieser Stelle, so ist

$$\frac{dp}{dx} = -\varDelta\frac{dV}{dx} + \varDelta x w^2; \quad \frac{dp}{dy} = -\varDelta\frac{dV}{dy} + \varDelta y w^2;$$
$$\frac{dp}{dz} = -\varDelta\frac{dV}{dz}.$$

Mit der Gleichung (a) in (Nro. 299) erhält man hieraus, wenn man die Temperatur als constant behandelt

$$k(a+\theta)\ln p = -V + \frac{1}{2}(x^2+y^2)w^2 + C,$$

wo C eine Constante nach x, y und z ist. Diese Constante bestimmt sich aus der Pressung, welche an einem bestimmten Punkte der Atmosphäre stattfindet; ist $p = p_0$ für x, y, z gleich x_0, y_0, z_0, und ist $V = V_0$ für diesen Punkt, so hat man

$$k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p} = V - V_0 + \frac{1}{2}[x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - x^2 - y^2]w^2. \quad \text{(c)}$$

Man sieht hieraus, dass die Niveaufläche der Atmosphäre, d. h. eine Fläche, in welcher der Druck p constant ist, nicht mit der Niveaufläche der Potentialfunction zusammen fällt. Ist die Atmosphäre nach unten durch eine tropfbare Flüssigkeit, das Meer, begrenzt, so erhält man für diese als Gleichgewichtsbedingung, wenn δ die Dichte derselben ist

$$p - p_0 = \delta\left[V - V_0 + \frac{1}{2}(x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - x^2 - y^2)\right]w^2 \quad \text{(d)}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der Punkt x_0, y_0, z_0 der Grenzfläche beider Flüssigkeiten angehöre, so dass in ihm p_0 und V_0 für beide Flüssigkeiten denselben Werth haben.

In der Grenzfläche zwischen beiden Flüssigkeiten muss p denselben Werth aus (a) und (b) erhalten, oder es muss

$$k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p}=\frac{p-p_0}{\delta}$$

sein, woraus p constant, und weil es in x_0, y_0, z_0 gleich p_0 ist, überall gleich diesem folgt.

Mit $p=p_0$ erhält man aus beiden Gleichungen die Gleichung der Grenzfläche zwischen Atmosphäre und Meer

$$0=V-V_0+\frac{1}{2}(x_0{}^2+y_0{}^2-x^2-y^2)w^2,$$

oder wenn man x_0, y_0, z_0 in der Erdaxe nimmt

$$0=V-V_0-\frac{1}{2}(x^2+y^2)w^2. \tag{e}$$

Setzt man annäherungsweise die Potentialfunction der Erde in x, y, z gleich

$$-\frac{fm}{r}$$

wo f die Constante der Gravitation, m die Masse der Erde und

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$

ist; und setzt man noch

$$r_0{}^2 \text{ für } x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2,$$

nimmt man die beiden Punkte x, y, z und x_0, y_0, z_0 auf demselben Halbmesser der Erde, für welchen die Winkel $r, z = r_0, z$ gleich $\frac{\pi}{2}-\beta$ sind, so wird die Gleichung (c)

$$k(a+\theta)\ln\frac{p}{p_0}=fm\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}(r^2-r_0{}^2)w^2\cos\beta^2.$$

Ist g die Beschleunigung der Schwere in x_0, y_0, z_0, so kann man setzen

$$g=\frac{fm}{r_0{}^2}-r_0w^2\cos\beta^2, \quad \text{womit}$$

obige Gleichung wird

$$k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p}=g\frac{r_0}{r}(r-r_0)+(r-r_0)\frac{r_0{}^2-\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}rr_0}{r}w^2\cos\beta^2.$$

Diese Gleichung kann man gebrauchen, um annähernd aus der an der Erdoberfläche beobachteten Pressung p_0 die in der Höhe $r-r_0$ über dieser Stelle stattfindende zu berechnen, oder umgekehrt

aus den beiden beobachteten Pressungen die Höhe $r - r_0$. Zum letzten Zwecke berechnet man zuerst annähernd

$$h = \frac{k(a+\theta)}{g} \ln \frac{p_0}{p},$$

und damit, indem man $r_0 + h$ in den übrigen Gliedern für r setzt

$$r - r_0 = h + \frac{h^2}{r_0},$$

wenn man die höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$ und ebenso $h^2 w^2$ gegen diese Glieder vernachlässigt.

302. Ein in die rotirende Atmosphäre eingetauchter Körper erleidet von dieser einen Auftrieb und Drücke, welche von der Centrifugalkraft der Luft herrühren. Ist der Körper nicht sehr ausgedehnt, so kann man die Dichte der Luft, welche mit ihm in Berührung steht, als constant betrachten, und ebenso die Schwerkraft. Dann ist der Auftrieb wie in (Nro. 295) zu berechnen, und die Drücke der Centrifugalkraft wie in (Nro. 297). Für wärmere Luft in kälterer bei derselben Pressung ergibt sich hiernach ein Druck vertical aufwärts, und ein normal gegen die Erdaxe gerichteter Druck. Ist V das Volumen der warmen Luft und θ_1 ihre Temperatur, während θ die Temperatur der umgebenden kalten Luft ist, so ist der Auftrieb weniger dem Gewichte der warmen Luft

$$V \Delta \frac{\theta_1 - \theta}{a + \theta_1} g,$$

wo Δ die Dichte der kalten Luft ist. Der Druck der aus der Centrifugalkraft gegen die Erdaxe herrührt, ist

$$V \Delta \frac{\theta_1 - \theta}{a + \theta_1} r w^2,$$

wo r die Entfernung der Luftmasse von der Erdaxe und w die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde bedeutet. Ist R der Erdhalbmesser bis zu dem Schwerpunkte der warmen Luft gemessen und β die Polhöhe des Orts derselben, so ergibt sich hieraus eine vertical aufwärts gehende Kraft

$$V \Delta \frac{\theta_1 - \theta}{a + \theta_1} (g - R w^2 \cos \beta^2)$$

und eine auf unserer Erdhälfte gegen Norden gerichtete Kraft

$$V \Delta \frac{\theta_1 - \theta}{a + \theta_1} R w^2 \sin\beta \cos\beta.$$

Die warme Luft wird also in der kalten aufwärts steigen, und zugleich gegen Norden abfliessen, kältere Luft in wärmerer dagegen abwärts sinken und gegen Süden fliessen.

Hydrodynamik.

303. Die Lehre von der Bewegung flüssiger Körper nennt man Hydrodynamik. Ihre Aufgabe hat sie gelöst, wenn sie für jedes Theilchen der betrachteten Flüssigkeit die Lage für jede Zeit angeben kann. Sind x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Atoms der Flüssigkeit zur Zeit 0, und $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ zur Zeit t, so muss die vollständig gelöste Aufgabe ξ, η und ζ als Functionen von x, y und z und von der Zeit anzugeben wissen.

304. Setzt man in den Gleichungen (53, Nro. 272) $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, für x, y, z und $X_x = Y_y = Z_z = -p$; $X_y = X_z = Y_z = 0$, so werden sie

$$-\frac{dp}{d(x+\xi)} + \Delta f_x = \Delta \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$-\frac{dp}{d(y+\eta)} + \Delta f_y = \Delta \frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$-\frac{dp}{d(z+\zeta)} + \Delta f_z = \Delta \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Die Pressung p an der Stelle $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ kann als eine Function der anfänglichen Coordinaten x, y, z des betrachteten Elementes und von t ausgedrückt werden. Dann hat man

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d(x+\xi)}\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) + \frac{dp}{d(y+\eta)}\frac{d\eta}{dx} + \frac{dp}{d(z+\zeta)}\frac{d\zeta}{dx},$$

womit man mit obigen Gleichungen erhält

$$-\frac{dp}{dx} + \Delta\left(f_x - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) + \Delta\left(f_y - \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\frac{d\eta}{dx} +$$

$$+ \Delta\left(f_z - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\frac{d\zeta}{dx} = 0,$$

und ebenso

$$-\frac{dp}{dy}+\Delta\left(f_x-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\frac{d\xi}{dy}+\Delta\left(f_y-\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)+$$
$$+\Delta\left(f_z-\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\frac{d\zeta}{dy}=0, \qquad (56)$$

$$-\frac{dp}{dz}+\Delta\left(f_x-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)\frac{d\xi}{dz}+\Delta\left(f_y-\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\frac{d\eta}{dz}+$$
$$+\Delta\left(f_z-\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\left(1+\frac{d\zeta}{dx}\right)=0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier Unbekannte ξ, η, ζ und p; es muss also noch eine vierte Bedingung zu ihrer Bestimmung existiren. Diese ist die Unveränderlichkeit der Masse des betrachteten Elementes.

Ist bei den anfänglichen Coordinaten x, y, z die Dichte anfänglich Δ_0, so ist die Masse des Elementes $dx\,dy\,dz$ gleich $\Delta_0\,dx\,dy\,dz$, und diese bleibt während der Bewegung dieselbe. Nun kommen aber die Punkte

$$x, y, z \quad \text{nach } x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta$$

$$x+dx, y, z \text{ nach } x+\xi+dx+\frac{d\xi}{dx}dx;\ y+\eta+\frac{d\eta}{dx}dx;$$
$$z+\zeta+\frac{d\zeta}{dx}dx;$$

$$x, y+dy, z \text{ nach } x+\xi+\frac{d\xi}{dy}dy;\ y+\eta+dy+\frac{d\eta}{dy}dy;$$
$$z+\zeta+\frac{d\zeta}{dy}dy;$$

$$x, y, z+dz \text{ nach } x+\xi+\frac{d\xi}{dz}dz;\ y+\eta+\frac{d\eta}{dz}dz;$$
$$z+\zeta+dz+\frac{d\zeta}{dz}dz.$$

Aus dem rechteckigen Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ wird daher bis auf unendlich kleine höherer Ordnung ein im allgemeinen schiefwinkliches, dessen Seiten die Projectionen

$$\begin{array}{lll}
dx\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right); & dx\frac{d\eta}{dx}; & dx\frac{d\zeta}{dx}; \\
dy\frac{d\xi}{dy}; & dy\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right); & dy\frac{d\zeta}{dy}; \\
dz\frac{d\xi}{dz}; & dz\frac{d\eta}{dz}; & dz\left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)
\end{array}$$

haben, und dessen Inhalt desshalb $dx\,dy\,dz$ multiplicirt mit

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)\left[\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)\left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)-\frac{d\eta}{dz}\frac{d\zeta}{dy}\right]+ \\
&+\frac{d\xi}{dy}\left[\frac{d\eta}{dz}\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)\right]+ \\
&+\frac{d\xi}{dz}\left[\frac{d\eta}{dx}\frac{d\zeta}{dy}-\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)\frac{d\zeta}{dx}\right],
\end{aligned} \tag{57}$$

oder mit der Determinanten der obigen Projectionen ist. Daraus ergibt sich diese Determinante gleich $\frac{\Delta_0}{\Delta}$ wenn Δ die Dichte der Flüssigkeit an der Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ ist.

305. Statt dieser vier Gleichungen, welche, wie man sieht, die Bewegung eines einzelnen Elementes der Flüssigkeit verfolgen, und welche Lagrange aufgestellt hat, nimmt man gewöhnlich andere, welche die Componenten der Geschwindigkeiten der Flüssigkeit an einer Stelle, deren Coordinaten x, y, z sind zur Zeit t bestimmen. Hier sind x, y, z nicht wie in den vorhergehenden Nummern die Coordinaten eines Flüssigkeitselementes zur Zeit $t=0$, sondern zur Zeit t, also was bisher mit $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ bezeichnet wurde.

Nennt man u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit nach den drei Coordinatenaxen bei x, y, z zur Zeit t, wächst u in der Zeit dt um $u'dt$; v um $v'dt$; w um $w'dt$, so sind die Gleichungen der Bewegung (53, Nro. 272)

$$\begin{aligned}
-\frac{dp}{dx}+\Delta f_x&=\Delta u', \\
-\frac{dp}{dy}+\Delta f_y&=\Delta v', \\
-\frac{dp}{dz}+\Delta f_z&=\Delta w'.
\end{aligned}$$

$u' dt$ ist hier die ganze Aenderung von u, welche aus der Verschiebung des Theilchens und aus der Aenderung der Zeit sich ergibt. Man hat

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt},$$

oder weil $\frac{dx}{dt} = u; \ \frac{dy}{dt} = v; \ \frac{dz}{dt} = w$ ist,

die Gleichungen der Bewegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varDelta}\frac{dp}{dx} &= f_x - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\varDelta}\frac{dp}{dy} &= f_y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\varDelta}\frac{dp}{dz} &= f_z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}. \end{aligned} \tag{58}$$

Um die Unveränderlichkeit der Masse auszudrücken, denke man sich das Parallelepiped $dx\,dy\,dz$, dessen Dichte $\varDelta$ sei. Durch die Fläche $dy\,dz$ fliesst in der Zeit dt die Flüssigkeitsmenge

$$\varDelta u\,dy\,dz\,dt$$

ein, während in derselben Zeit durch die gegenüberliegende Seite, welche dieselbe Grösse hat, die Masse

$$\left(\varDelta u + \frac{d(\varDelta u)}{dx}dx\right)dy\,dz\,dt$$

ausfliesst. Hierdurch nimmt die Masse der Flüssigkeit in diesem Parallelepiped in der Zeit dt zu um

$$-\frac{d(\varDelta u)}{dx}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Berechnet man ebenso die durch die Flächen $dx\,dz$ und $dy\,dz$ zu und abfliessende Flüssigkeitsmenge, so erhält man die in der Zeit dt mehr zu als abfliessende Masse

$$\left(-\frac{d(\varDelta u)}{dx} - \frac{d(\varDelta v)}{dy} - \frac{d(\varDelta w)}{dz}\right)dx\,dy\,dz\,dt;$$

nennt man $d\varDelta$ die in der Zeit dt eintretende Vergrösserung der Dichte, so ist dieses mehr gleich

$$d\varDelta\,dx\,dy\,dz,$$

woraus die Gleichung

$$\frac{d\varDelta}{dt}+\frac{d(\varDelta u)}{dx}+\frac{d(\varDelta v)}{dy}+\frac{d(\varDelta w)}{dz}=0. \tag{59}$$

Für eine tropfbare, nicht zusammendrückbare Flüssigkeit wird $\varDelta$ constant, und damit diese Gleichung

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, \tag{60}$$

während bei einer elastischen Flüssigkeit noch die Gleichung (Nro. 299)

$$p=k\varDelta(a+\theta)$$

existirt.

Diess sind die von Euler aufgestellten Gleichungen.

306. Für die freie Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit ergibt sich eine besondere Grenzbedingung. Ist

$$z=f_{x,y,t}$$

die mit der Zeit veränderliche Gleichung dieser Oberfläche; nimmt man in ihr einen Punkt x, y, z, und beschreibt von diesem weg das Parallelepiped $dx\,dy\,dz$, so wird dieses zum Theil in die Flüssigkeit, zum Theil ausser diese fallen. Ich nehme an, dz sei so gross genommen, dass die zu x, y parallele und in der Tiefe $z+dz$ liegende Fläche $dx\,dy$ nicht von der freien Oberfläche getroffen wird, sondern ganz in der Flüssigkeit liegt, was immer möglich sein wird, wenn die Richtung z so gewählt ist, dass sie mit der Normalen auf die Oberfläche in x, y, z einen nicht zu grossen Winkel bildet.

Dann sei durch $x+dx$, y, $z+\delta z$ ein zweiter Punkt der freien Oberfläche gegeben, für welchen

$$\delta z=\frac{df}{dx}dx$$

ist. Von dem Rechtecke $dx\,dz$ fällt damit in die Flüssigkeit die Fläche

$$dx\,dz-\frac{1}{2}dx\,\delta z=dx\,dz-\frac{1}{2}\frac{df}{dx}dx^2,$$

und das hierdurch in der Zeit dt zufliessende Flüssigkeits-Volum ist

$$v\left(dx\,dz - \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx}\,dx^2\right)dt.$$

Die mit z parallelen Seiten der gegenüberliegenden Fläche des Parallelepipeds $dx\,dy\,dz$ sind, so weit sie ausser der Flüssigkeit liegen

$$\frac{df}{dy}\,dy \text{ und } \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dx}\,dx,$$

wenn man die unendlich kleinen der zweiten Ordnung gegen diese der ersten weglässt. Damit ergibt sich der Theil des betrachteten Parallelogramms, welcher in die Flüssigkeit taucht

$$dx\,dz - \frac{df}{dy}\,dy\,dx - \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx}\,dx^2$$

und das abfliessende Volum der Flüssigkeit

$$\left(v + \frac{dv}{dy}\,dy\right)\left(dx\,dz - \frac{df}{dy}\,dx\,dy - \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx}\,dx^2\right)dt,$$

woraus das hierdurch in das Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ in der Zeit dt mehr zu als abgeflossene Volum gleich

$$v\frac{df}{dx}\,dx\,dy\,dt$$

mit Weglassung der Unendlichkleinen höherer Ordnung sich ergibt. Ebenso findet man für die Flächen des Parallelepipeds, die gleich $dy\,dz$ sind, die Zunahme der Flüssigkeit im Parallelepiped

$$u\frac{df}{dy}\,dx\,dy\,dt.$$

In der Richtung normal zu z ist das betrachtete Volum auf einer Seite durch die freie Oberfläche begrenzt, auf der andern durch die Fläche $dx\,dy$; durch die erste tritt keine Flüssigkeit ein, durch die zweite dagegen das Volum

$$w\,dx\,dy\,dt$$

aus, oder dieses Volum mit dem Zeichen — zu. Diese drei Zunahmen des Volums der Flüssigkeit in dem Raume $dx\,dy\,dz$ ergeben eine Aenderung der freien Oberfläche in der Zeit dt, welche

bei x, y, z die Zunahme der Coordinate z um $\frac{dz}{dt}dt$ geben soll. Dann ist die Abnahme des betrachteten Volums der Flüssigkeit in dem unveränderlichen Parallelepiped $dx\,dy\,dz$ bis auf unendlich kleine höherer Ordnung

$$dx\,dy\frac{dz}{dt}dt,$$

womit endlich
$$\frac{dz}{dt} = -u\frac{df}{dx} - v\frac{df}{dy} + w$$

sich ergibt, als Bedingungsgleichung für die freie Oberfläche.

Schreibt man die Gleichung der freien Oberfläche in der Form

$$F_{x,\,y,\,z,\,t} = 0,$$

so nimmt obige Gleichung die Form an

$$\frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0. \qquad (61)$$

Ist die betrachtete Oberfläche keine freie, sondern die an einer festen Wand anliegende, deren Gleichung

$$F_{x,\,y,\,z} = 0$$

ist, so fällt das erste Glied dieser Gleichung weg.

307. Für die freie Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit ist in der Regel die Pressung constant, daher dort die vollständige Ableitung von p nach der Zeit gleich Null oder

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = 0. \qquad (62)$$

Ist die Pressung nicht constant, sondern von der Zeit abhängig gleich P, so wird die rechte Seite dieser Gleichung

$$\frac{dP}{dt}.$$

Die Bedingungen in dieser und der vorhergehenden Nummer dienen dazu, die durch die Integration eintretenden willkührlichen Functionen zu bestimmen.

308. Eliminirt man aus den Gleichungen (58) p, indem man die erste nach y, die zweite nach x ableitet und dann abzieht, so

fällt, im Falle die Kraft einer Kraftfunction entspricht (Nro. 229), zugleich mit p auch die Kraft aus diesen Gleichungen weg. Dann erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}=2\gamma,$$

setzt, unter der Voraussetzung einer constanten Dichte

$$2\frac{d\gamma}{dt}=-2u\frac{d\gamma}{dx}-2v\frac{d\gamma}{dy}-2w\frac{d\gamma}{dz}-2\gamma\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)-$$
$$-\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{du}{dz}.$$

Bezeichnet man die totale Ableitung von γ nach allem t, dem explicit vorkommenden wie dem in x, y, z implicirt vorkommenden mit

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t},$$

so ist
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{d\gamma}{dt}+u\frac{d\gamma}{dx}+v\frac{d\gamma}{dy}+w\frac{d\gamma}{dz},$$

und also mit der obigen Gleichung

$$2\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-2\gamma\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)-\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{du}{dz}. \tag{a}$$

Die Gleichung (60) gibt mit dieser, wenn man

$$\frac{dw}{dy}\frac{dw}{dx}-\frac{dw}{dy}\frac{dw}{dx}=0$$

addirt, und

$$\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}=2\beta;\quad \frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=2\alpha$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\gamma\frac{dw}{dz}+\beta\frac{dw}{dy}+\alpha\frac{dw}{dx}.$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\gamma\frac{dv}{dz}+\beta\frac{dv}{dy}+\alpha\frac{dv}{dx}\quad\text{und}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\gamma\frac{du}{dz}+\beta\frac{du}{dy}+\alpha\frac{du}{dx}.$$

Addirt man zu der Gleichung (a)

$$\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx},$$

so erhält man aus ihr die erste der drei Gleichungen

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\gamma\frac{dw}{dz}+\beta\frac{dv}{dz}+\alpha\frac{du}{dz},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\gamma\frac{dw}{dy}+\beta\frac{dv}{dy}+\alpha\frac{du}{dy},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\gamma\frac{dw}{dx}+\beta\frac{dv}{dx}+\alpha\frac{du}{dx}.$$

Die Differentiale $\partial\alpha$, $\partial\beta$, $\partial\gamma$ sind die Aenderungen von α, β, γ, welche in der Zeit ∂t eintreten, wenn man ein bestimmtes Theilchen der Flüssigkeit in seiner Bahn während dieser Zeit verfolgt. Sind also α, β, γ zu irgend einer Zeit für dieses Theilchen sämmtlich gleich Null, so werden sie das auch während der ganzen Bewegung unter dem Einflusse der Kräfte f_x, f_y, f_z, welche die Ableitungen einer Kraftfunction nach x, y, z sind, bleiben. Sind anfänglich α, β, γ für alle Flüssigkeitstheilchen gleich Null, so bleiben sie diess auch während der Bewegung für alle Flüssigkeitstheilchen. Für die Ruhe sind α, β, γ gleich Null; ist diess während der Bewegung nicht mehr der Fall, so müssen Kräfte auf die Flüssigkeit eingewirkt haben, welche sich nicht als Ableitungen einer Kraftfunction darstellen lassen, welche also nicht Anziehungs- und Abstossungskräfte gegen oder von bestimmten Punkten sein können.

309. Sind α, β, γ in der vorhergehenden Nummer Null durch die ganze Flüssigkeit, ist also

$$\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}=0;\ \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}=0;\ \frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=0,$$

so kann man, wie man sieht, u, v, w als die Partialableitungen nach x, y, z einer Function φ darstellen, deren vollständiges Differential

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz$$

ist, so dass

$$u = \frac{d\varphi}{dx};\ v = \frac{d\varphi}{dy};\ w = \frac{d\varphi}{dz}\ \text{ist.}$$

Diese Function φ nennen wir die Geschwindigkeitsfunction dieser Bewegung. Mit ihr reduciren sich die drei Veränderlichen u, v, w auf eine einzige.

Rotirt Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe um die Axe z des Gefässes, und ist ω die constante Winkelgeschwindigkeit, so existirt für diese Bewegung keine Geschwindigkeitsfunction, und diese Bewegung kann also auch nicht durch anziehende oder abstossende Kräfte hervorgebracht werden. Es ist für einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, die Geschwindigkeit nach x oder

$$u = -y\omega,$$

nach y oder

$$v = +x\omega.$$

Daraus erhält man

$$\frac{du}{dy} = -\omega;\quad \frac{dv}{dx} = +\omega.$$

Die einzelnen Flüssigkeitstheilchen haben daher neben ihrer Translation eine Rotation mit der Geschwindigkeit ω um eine durch sie gehende, zu z parallele Axe.

Ist die Winkelgeschwindigkeit in demselben Gefässe veränderlich mit der Entfernung r von der z Axe und gleich

$$\frac{a^2\omega}{r^2},$$

wo a und ω constant sind, so sind die Componenten der Geschwindigkeit des bei x, y, z liegenden Theilchens

$$u = -y\frac{a^2\omega}{r^2}\ \text{und}\ v = +x\frac{a^2\omega}{r^2}.$$

Damit und mit

$$r^2 = x^2 + y^2$$

findet man

$$\frac{du}{dy} = -\frac{a^2\omega}{r^2} + 2\frac{y^2a^2\omega}{r^4} = \frac{(y^2-x^2)a^2\omega}{r^4},$$

$$\frac{dv}{dx} = +\frac{a^2\omega}{r^2} - 2\frac{x^2a^2\omega}{r^4} = \frac{(y^2-x^2)a^2\omega}{r^4},$$

woraus
$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 0$$
folgt.

Hier existirt also eine Geschwindigkeitsfunction
$$\varphi = a^2 \omega \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x}$$
neben einer Drehung der Flüssigkeitstheilchen.

310. Existirt eine Geschwindigkeitsfunction φ, so kann man die Gleichungen (58) in eine zusammenfassen, indem man sie der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplicirt und addirt. Man erhält
$$\frac{1}{\Delta} dp = f_x dx + f_y dy + f_z dz - d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) -$$
$$- \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]. \qquad (63)$$
Hier sind dx, dy, dz ganz unabhängig von einander.

Die Wellenbewegung in einer tropfbaren Flüssigkeit.

311. Wir betrachten die Bewegung einer schweren tropfbaren Flüssigkeit in einem Kanale mit horizontalem Boden, welcher durch zwei parallele verticale Wände begrenzt, im übrigen aber unbegrenzt ist. Wir setzen voraus, dass der Zustand der Bewegung in allen Punkten einer auf diesen verticalen Wänden rechtwinklichen Linie zu gleicher Zeit derselbe sei. Dadurch reduciren sich die veränderlichen Coordinaten eines Elementes der Flüssigkeit auf zwei; von diesen nehmen wir die z vertical aufwärts vom Boden des Kanals gemessen, die x horizontal und parallel jenen verticalen Wänden. Wir setzen endlich voraus, die Geschwindigkeiten der Elemente der Flüssigkeit seien immer so klein, dass die Quadrate derselben gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden können.

Haben anfänglich auf die früher in Ruhe befindliche Flüssigkeit Kräfte gewirkt, welche einer Kraftfunction entsprechen, so müssen auch die anfänglichen Geschwindigkeiten einer Geschwin-

digkeitsfunction entsprechen, und diess wird der Fall sein für die ganze Dauer der Bewegung, wenn später nur noch die Schwerkraft wirkt. Wir setzen unter dieser Voraussetzung

$$u = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{und} \quad w = \frac{d\varphi}{dz}, \tag{a}$$

womit die Gleichung, welche die Gleichheit der Masse ausdrückt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \tag{b}$$

übergeht.

Die Gleichung (63) wird

$$\frac{1}{\varDelta} dp = -g\,dz - d\frac{d\varphi}{dt}$$

woraus

$$p = -\varDelta g(z-h) - \varDelta \frac{d\varphi}{dt} \tag{c}$$

wird, wo h die Tiefe der ruhenden Flüssigkeit sein soll.

Für den horizontalen Boden ist

$$w = 0, \tag{d}$$

und für die Oberfläche wird $p = 0$

$$0 = -g(z-h) - \frac{d\varphi}{dt},$$

wozu noch die Gleichung (61), welche hier, wenn man die Producte der kleinen Grössen von der Ordnung w weglässt,

$$\frac{dz}{dt} = w \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \text{wird.} \tag{f}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (b) kann durch

$$\varphi = \Sigma (A e^{az} + A_1 e^{-az}) \cos(ax + b)$$

dargestellt werden, in welcher A, A_1, a und b constant nach x, z sind, und überdiess a als positiv betrachtet werden kann.

Die Bedingung (d) gibt hierzu

$$A = A_1 .$$

Für die Oberfläche setze ich $z - h$ als sehr klein voraus. Dann wird für die Oberfläche aus

$$\varphi = \varphi_h + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_h (z-h) \ldots$$
$$= \varphi_h + w(z-h) + \ldots,$$

wenn man die Kleinen zweiter Ordnung wie oben weglässt, nahe

$$\varphi = \varphi_h \text{ und } \frac{d\varphi}{dz} = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_h,$$

womit die Gleichung (f) wird

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_h + g\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_h = 0.$$

Setzt man den oben aufgestellten Werth von φ in diese Gleichung, indem man voraussetzt, es sei von den Constanten nur b nach t veränderlich, so erhält man

$$-\Sigma\left[A(e^{ah}+e^{-ah})\cos(ax+b)\left(\frac{db}{dt}\right)^2\right] -$$
$$-\Sigma\left[A(e^{ah}+e^{-ah})\sin(ax+b)\frac{d^2b}{dt^2}\right] +$$
$$+ g\Sigma[aA(e^{ah}-e^{-ah})\cos(ax+b)] = 0.$$

Wegen der Willkührlichkeit von x zerfällt diese Gleichung in

$$(e^{ah}+e^{-ah})\left(\frac{db}{dt}\right)^2 = ga(e^{ah}-e^{-ah}),$$

und in

$$\frac{d^2b}{dt^2} = 0.$$

Setzt man

$$\frac{ga(e^{ah}-e^{-ah})}{e^{ah}-e^{-ah}} = c^2, \tag{g}$$

so entspricht man diesen beiden Gleichungen durch

$$b = ct + \alpha \text{ oder } b = -ct + \alpha_1$$

wo α und α_1 willkührliche Constanten sind.

Hiermit hat man als ein allen Bedingungsgleichungen entsprechendes Integral

$$\varphi = \Sigma A(e^{az}+e^{-az})\cos(ax+ct+\alpha) +$$
$$+ \Sigma B(e^{az}+e^{-az})\cos(ax-ct+\alpha_1). \tag{h}$$

Der einfache Wellenzug.

312. Nimmt man ein einzelnes Glied der Summe in (h), so entspricht diess ebenfalls den sechs gegebenen Gleichungen und gibt die einfachste Bewegung, welche hier stattfinden kann. Wir betrachten die durch

$$\varphi = B(e^{az} + e^{-az}) \cos(ax - ct + \alpha_1)$$

bestimmte Bewegung.

Aus dieser Gleichung findet man die Gleichung der Oberfläche und die Componenten der Geschwindigkeit aus (e) und (a)

$$z - h = -\frac{Bc}{g}(e^{ah} + e^{-ah}) \sin(ax - ct + \alpha_1),$$

$$u = -Ba(e^{az} + e^{-az}) \sin(ax - ct + \alpha_1),$$

$$w = \quad Ba(e^{az} - e^{-az}) \cos(ax - ct + \alpha_1).$$

Damit diese Bewegung eintrete, muss der Anfangszustand diesen Gleichungen entsprechend sein. Setzt man voraus, es sei anfänglich die Gleichung der Oberfläche

$$z - h = A \sin\frac{\pi x}{l};$$

so wird

$$-\frac{Bc}{g}(e^{ah} + e^{-ah}) = A \text{ und } a = \frac{\pi}{l}; \ \alpha_1 = 0;$$

und damit

$$z - h = A \sin\left(\frac{\pi x}{l} - ct\right),$$

$$u = -\frac{Aga}{c} \cdot \frac{e^{az} + e^{-az}}{e^{ah} + e^{-ah}} \sin\left(\frac{\pi x}{l} - ct\right),$$

$$w = -\frac{Aga}{c} \cdot \frac{e^{az} - e^{-az}}{e^{ah} + e^{-ah}} \cos\left(\frac{\pi x}{l} - ct\right).$$

Für irgend einen Werth von x und z ergibt sich derselbe Zustand der Bewegung, so oft ct um 2π wächst, also je nach der Periode

$$\tau = \frac{2\pi}{c}.$$

Diese Zeit nennt man die Oscillationsdauer; sie ist für die ganze Flüssigkeitsmasse dieselbe.

Ebenso ist zu gleicher Zeit derselbe Zustand der Bewegung je an zwei Orten, welche um

$$\lambda = 2l$$

horizontal auseinander liegen. Diese Länge λ ist die Wellenlänge. Derselbe Zustand der Bewegung rückt ferner von einer Stelle x zu einer zweiten in derselben Tiefe liegenden $x + x'$ in einer Zeit t' fort, für welche

$$x' = \frac{lc}{\pi} t'$$

ist. Die Wellen gehen daher mit Beibehaltung ihrer Form mit der Geschwindigkeit

$$\frac{lc}{\pi} = \frac{c}{a} = \frac{\lambda}{\tau} = V$$

gleichförmig nach der Seite der positiven x fort.

Mit Hilfe dieser Werthe kann man obige Gleichungen schreiben

$$(z - h) = - A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$u = - \frac{Ag}{V} \frac{e^{az} + e^{-az}}{e^{ah} + e^{-ah}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$w = - \frac{Ag}{V} \frac{e^{az} - e^{-az}}{e^{ah} + e^{-ah}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Man sieht, die Zeichen von $z - h$ und von u sind immer dieselben; ist die Flüssigkeit an der Oberfläche über das Gleichgewichtsniveau erhoben, befindet man sich in einem Wellenberge oder vertical unter diesem, so ist die horizontale Geschwindigkeit positiv, d. h. nach der Seite der positiven x gerichtet, oder nach der, nach welcher die Wellen fortgehen. In den Wellenthälern ist dagegen die Richtung der horizontalen Geschwindigkeit der Richtung der Wellenbewegung entgegen.

Die verticale Bewegung ist dagegen positiv, d. h. aufwärts gerichtet an allen Stellen, über welchen sich die Oberfläche der Flüssigkeit hebt, negativ dort, wo die Oberfläche im Sinken begriffen ist.

313. Um die Bahn eines Flüssigkeitstheilchens zu finden, seien x und z die Coordinaten desselben zur Zeit 0 und $x+\xi$ und $z+\zeta$ zur Zeit t, dann ist

$$u=\frac{d\xi}{dt} \text{ und } v=\frac{d\zeta}{dt}.$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen für u und w, und vernachlässigt man dabei ξ und ζ gegen λ, so kann man die Integration ausführen, und erhält

$$\xi=\frac{Ag\tau}{2\pi V}\cdot\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{ah}+e^{-ah}}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)-\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right],$$

$$\zeta=-\frac{Ag\tau}{2\pi V}\cdot\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{ah}+e^{-ah}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)-\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right].$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass alle Theilchen ihre Bahnen periodisch in der für alle gleichen Oscillationsdauer τ durchlaufen. Man findet für diese Bahnen Ellipsen, deren Axen

$$A\cdot\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{ah}-e^{-ah}} \quad \text{horizontal, und}$$

$$A\cdot\frac{e^{az}-e^{-az}}{e^{ah}-e^{-ah}} \quad \text{vertical sind.}$$

Alle Theilchen, welche anfänglich in derselben Horizontalebene lagen, durchlaufen dieselben Ellipsen; die horizontalen Axen der Bahnen sind grösser, als die verticalen. An der Oberfläche ist die verticale Axe, die halbe Höhe der Wellen, A und die horizontale Axe der dort beschriebenen Ellipse

$$A\cdot\frac{e^{ah}+e^{-ah}}{e^{ah}-e^{-ah}}.$$

Am Boden ist die verticale Axe gleich Null, und die grösste horizontale Ausweichung von der Gleichgewichtslage

$$\frac{2A}{e^{ah}-e^{-ah}}.$$

Diese hängt also von der Höhe der Wellen ab, aber auch von

$$ah = 2\pi\frac{h}{\lambda},$$

d. h. von dem Verhältnisse der Wellenlänge zu der Tiefe der Flüssigkeit. Ist die Flüssigkeit gegen die Wellenlänge sehr tief, so ist die Bewegung am Boden unmerklich.

314. Ist die Tiefe der Flüssigkeit nur ein kleiner Theil der Wellenlänge, so kann man genähert

$$e^{ah} = 1 + 2\pi\frac{h}{\lambda}$$

setzen. Damit wird

$$V^2 = gh.$$

In einer gegen die Wellenlänge wenig tiefen Flüssigkeit ist daher die Geschwindigkeit der Wellen unabhängig von deren Länge. Die Axen der von den einzelnen Theilchen beschriebenen Ellipsen werden

die horizontalen $$A\frac{\lambda}{2\pi h},$$

die verticalen $$A\frac{z}{h}.$$

Die horizontalen, grossen Axen der Bahnen sind daher alle gleich gross, proportional der Wellenhöhe und dem Verhältnisse von Wellenlänge und Tiefe der Flüssigkeit.

Die verticalen Axen sind proportional der Höhe der Flüssigkeitstheilchen über dem Boden.

Die horizontale Geschwindigkeit ist

$$u = -A\sqrt{\frac{g}{h}}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

sie ist unabhängig von der Höhe über dem Boden.

Nimmt man an, dass bei gleichem Anstosse den Theilchen der Oberfläche gleiche grösste horizontale Geschwindigkeiten ertheilt werden, so werden diese

$$u_1 = A\sqrt{\frac{g}{h}},$$

und also für verschieden tiefe Flüssigkeiten die aus diesem An-

stosse sich ergebende Höhe der Wellen proportional der Quadratwurzel aus der Tiefe der Flüssigkeit.

315. Ist dagegen die Tiefe der Flüssigkeit sehr gross gegen die Wellenlänge, so hat man sehr nahe

$$e^{-ah} = 0.$$

Die Geschwindigkeit der Wellen wird hier

$$v = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

also der Quadratwurzel aus der Wellenlänge proportional.

Für Theile der Flüssigkeit, welche hinreichend weit vom Boden wegliegen, erhält man für die Bahn der einzelnen Theilchen Kreise, welche von diesen Theilchen gleichförmig durchlaufen werden. Die Halbmesser dieser Kreise sind

$$A e^{-a(h-z)}.$$

316. Betrachtet man eines der Glieder der ersten Summe in (h), so erhält man einen einfachen Wellenzug, welcher nach der Seite der negativen x fortgeht, der sich im übrigen ganz ebenso verhält, wie der oben betrachtete.

317. Entspricht der Anfangszustand der Summe mehrerer solcher Glieder, wie eines in (Nro. 312) betrachtet wurde, so hat man mehrere oder eine unendliche Zahl von einfachen Wellenzügen, welche sich überdecken, und welche alle nach derselben Seite fortgehen. Ist die Flüssigkeit wenig tief gegen alle vorkommenden Wellenlängen, so werden diese verschiedenen Züge mit derselben Geschwindigkeit fortgehen, und die durch das Ueberdecken derselben entstandene Form der Oberfläche wird unverändert längs dieser fortgehen. In einer gegen die Wellenlängen sehr tiefen Flüssigkeit werden dagegen die längeren Wellen schneller fortgehen als die kürzeren; hier wird durch das Ueberdecken der Wellenzüge die Form der Oberfläche jeden Augenblick eine andere. Sind sehr lange und kurze Wellen beisammen, so werden die langen Wellen unter den kurzen gleichsam fortrollen, und diese Stufen auf jenen bilden.

Man kann bekanntlich jede beliebige Function in eine Summe

wie (h) zerlegen, wozu die Fourier'schen Reihen dienen. Man kann also auch jeden beliebigen Anfangszustand der Wellenbewegung einer Flüssigkeit als durch eine Reihe von einfachen Wellenzügen zusammengesetzt betrachten, und also jede Wellenbewegung auf das Ueberdecken von einfachen Wellenzügen zurückführen. Die längsten von diesen Wellen werden im Allgemeinen mit der Geschwindigkeit $\sqrt{gh}$ fortgehen, und mit dieser Geschwindigkeit wird sich daher die erste Bewegung durch die Flüssigkeit fortpflanzen, welches aber gewöhnlich nicht die stärkste Bewegung ist.

Die Wellenbewegung der Luft in einer cylindrischen Röhre.

318. Setzt man voraus, es bewegen sich alle Lufttheilchen parallel der Axe der Röhre, und es seien die Geschwindigkeiten in allen Punkten eines zur Axe der Röhre rechtwinklichen Querschnittes gleich gross; nimmt man die Axe der Röhre als die Axe der x und bezeichnet x die Abscisse eines Lufttheilchens im Gleichgewichtszustande und $\varDelta$ die constante Dichte der ruhenden Luft; dagegen $x + \xi$ die Abscisse des betrachteten Lufttheilchens zur Zeit t und $\varDelta(1 + \delta)$ die Dichte der Luft an dieser Stelle zu dieser Zeit, p aber den Druck der Luft bei $x + \xi$ zur Zeit t; nimmt man an, es wirken keine äusseren Kräfte auf die Luft in der Röhre; so werden die Gleichungen in Nro. 304

$$-\frac{dp}{dx} - \varDelta(1+\delta)\frac{d^2\xi}{dt^2}\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) = 0,$$

und

$$1 + \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{1+\delta}.$$

Die erste dieser Gleichungen wird mit der zweiten

$$\frac{dp}{dx} = -\varDelta\frac{d^2\xi}{dt^2}, \tag{a}$$

was sich für diesen einfachen Fall auch sehr leicht direct ergibt.

319. Setzt man voraus, die Dichte werde bei dieser Bewegung nur sehr wenig geändert, oder die durch δ gemessene Verdichtung

sei sehr klein gegen 1, so kann man die zweite Gleichung genähert schreiben

$$\delta = -\frac{d\xi}{dx}. \tag{b}$$

Die beiden Grössen δ und p sind noch durch die Boyle'- und Gay Lussac'schen Gesetze verbunden. Bei den hier zu betrachtenden, schnell aufeinander folgenden Verdichtungen und Verdünnungen wird aber abwechselnd die Temperatur erhöht und erniedrigt, und die Relation zwischen p und δ wird dadurch geändert.

Die genannten Gesetze geben (Nro. 299)

$$p = k\Delta(1+\delta)(a+\theta),$$

wenn θ die constante Temperatur ist. Aendert sich aber durch die Verdichtung die Temperatur um θ', so wird nun

$$p = k\Delta(1+\delta)(a+\theta+\theta').$$

Diese Temperaturänderung lässt sich in folgender Weise bestimmen. Zur Masse 1 der Luft trete die Wärmemenge c und erwärme diese Luftmasse um 1^0 bei constantem Drucke, so dass also c die specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke ist. Durch dieses Erwärmen ergibt sich die Volumsänderung

$$\frac{1}{\Delta(a+\theta)}.$$

Wird diese Luft, auf das frühere Volum bei gleicher Temperatur $(\theta+1)$ zusammengedrückt, so tritt die Wärmemenge

$$c - c_1$$

aus, wenn c_1 die specifische Wärme der Luft bei constantem Volume ist. Tritt diese Wärme nicht aus, so wird sie bei dem ursprünglichen Volum v die Temperatur erhöhen um

$$\frac{c-c_1}{c_1} = \frac{c}{c_1} - 1.$$

Bei den hier vorkommenden sehr kleinen Volumsänderungen kann man annehmen, es sei die Volumsänderung durch Druck der dadurch hervorgerufenen Temperaturänderung proportional. Daher

$$\frac{\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\Delta(1+\delta)}}{\frac{1}{\Delta(a+\theta)}}=\frac{\theta'}{\frac{c}{c_1}-1},$$

woraus

$$\left(\frac{c}{c_1}-1\right)(a+\theta)\delta=(1+\delta)\theta'$$

folgt. Damit wird nach einer kleinen Reduction

$$p=k\Delta(a+\theta)\left(1+\delta\frac{c}{c_1}\right). \tag{c}$$

Das Verhältniss $\frac{c}{c_1}$ ist, wie aus den Beobachtungen hervorzugehen scheint, unabhängig vom Drucke. Daher gibt die letzte Gleichung

$$\frac{dp}{dx}=k\Delta(a+\theta)\frac{c}{c_1}\frac{d\delta}{dx},$$

was mit

$$\frac{d\delta}{dx}=-\frac{d^2\xi}{dx^2}$$

aus (b) für die Gleichung (a) gibt

$$k(a+\theta)\frac{c}{c_1}\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}. \tag{d}$$

320. Setzt man den constanten Coefficienten

$$k(a+\theta)\frac{c}{c_1}=b^2, \tag{e}$$

so wird das allgemeine Integral der Gleichung (d)

$$\xi=F_{x+bt}+f_{x-bt}$$

wie in (Nro. 261).

Dazu wird die Verdichtung

$$\delta=-\frac{d\xi}{dx}=-\frac{dF}{d(x+bt)}-\frac{df}{d(x-bt)},$$

und die Geschwindigkeit

$$u=\frac{d\xi}{dt}=b\left[\frac{dF}{d(x+bt)}-\frac{df}{d(x-bt)}\right].$$

Wie die Wellenbewegung an einem biegsamen Faden kann man auch diese in zwei zerlegen, indem man setzt

$$\delta = \delta' + \delta''; \; u = u' + u''$$

und

$$u' = -b\delta'; \; u'' = +b\delta''.$$

Damit hat man

$$\delta' = -\frac{dF}{d(x+bt)} \quad \text{und} \quad \delta'' = -\frac{df}{d(x-bt)},$$

welche also Functionen von $x+bt$ das eine und von $x-bt$ das andere sind.

Wie bei der erwähnten Wellenbewegung ist δ' die Verdichtung einer nach der Seite der negativen x hinlaufenden Welle, δ'' dagegen die Verdichtung einer nach der Seite der positiven x hinlaufenden. Bei der letztern ist die Geschwindigkeit der Lufttheilchen zugleich mit der Verdichtung positiv oder negativ, d. h. in dem verdichteten Theile der Welle bewegen sich die Lufttheilchen nach der Seite, nach der die Welle fortschreitet, in dem verdünnten Theile dagegen nach der entgegengesetzten Seite. Im Uebrigen erfolgt hier alles, wie bei der Wellenbewegung am biegsamen Faden.

321. Die Geschwindigkeit dieser Wellenfortpflanzung in der Luft ist

$$b = \sqrt{k(a+\theta)\frac{c}{c_1}}: \tag{f}$$

Sie ist, wie man sieht, unabhängig von dem Drucke, unter dem die Luft steht, wächst aber mit der Temperatur, und ist, weil k für Gasarten von verschiedenem specifischem Gewicht verschieden ist (Nro. 299), für verschiedene Gasarten verschieden. Für atmosphärische Luft erhält man für die Temperatur 0° C mit $\frac{c}{c_1} = 1{,}411$ den Werth $b = 332{,}^m4$. Da der Schall durch solche Wellen fortgepflanzt wird, nennt man b gewöhnlich die Schallgeschwindigkeit.

322. Ist die Röhre an einem Ende verschlossen, so ist dort die Geschwindigkeit u gleich Null, unabhängig von der Zeit. Diess gibt eine Zurückwerfung der Wellenbewegung, wie wir diese an dem biegsamen Faden mit festgehaltenem Ende fanden.

Die an dem verschlossenen Ende ankommende Welle wird

zurückgeworfen, und geht nach der Durchkreuzung mit unveränderter, aber umgekehrter Form nach der entgegengesetzten Seite fort. Dabei entsteht aus der verdichteten Welle durch die Zurückwerfung eine verdichtete Welle, aus der verdünnten eine verdünnte. Die Ableitung dieses Resultates kann ganz wie in Nro. 266 geschehen.

Besteht die ankommende Welle aus einem einfachen Wellenzuge, ist

$$u' = b s \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right],$$

so gehört dazu

$$\delta' = \frac{u'}{b}.$$

Daraus wird für den reflectirten Wellenzug, wenn man annimmt, bei $x = 0$ sei das geschlossene Ende

$$u'' + u' = 0; \; u'' = -b s \sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} + \alpha\right),$$

was, wenn man $t + \frac{x}{b}$ für t setzt

$$u'' = -b s \sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} + 2\pi\frac{x}{b\tau} + \alpha\right)$$

$$= -b s \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right]$$

gibt. Diess entspricht einem dem ankommenden ganz gleichen, nach der Seite der negativen x hinlaufenden Wellenzuge. Die Verdichtung ist für diesen

$$\delta'' = -\frac{u''}{b}.$$

Aus der Ueberdeckung des ankommenden und des reflectirten Zuges erhält man

$$u'' + u' = -2 b s \cos\left(2\pi\frac{t}{\tau} + \alpha\right)\sin 2\pi\frac{x}{\lambda},$$

und

$$\delta + \delta'' = 2 b s \sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} + \alpha\right)\cos 2\pi\frac{x}{l}.$$

Die Geschwindigkeit wird also Null an allen Stellen, die von dem verschlossenen Ende um eine ganze Zahl von halben Wellen-

längen wegliegen. Diese Stellen heissen hier die Schwingungsknoten. Ein solcher ist immer das verschlossene Ende. Die durch die Ueberdeckung beider Wellenzüge entstandene Bewegung ist eine stehende Schwingung. Die Stellen der stärksten Bewegung liegen in der Mitte zwischen den Schwingungsknoten; in ihnen ist die Verdichtung constant gleich Null, während die stärksten Verdichtungen und Verdünnungen immer in den Schwingungsknoten auftreten. Die Bewegung aller Lufttheile zwischen zwei Schwingungsknoten ist zu gleicher Zeit gleich gerichtet, d. h. alle diese Luft fliesst von einem Schwingungsknoten gegen den nächsten, bis die Geschwindigkeit aller Lufttheile zugleich Null geworden ist, worauf diese die entgegengesetzte Bewegung annehmen.

323. Ist die Röhre am einen Ende offen, so wird dort die Luft frei ausfliessen, wenn eine verdichtete Welle ankommt, oder einfliessen, wenn eine verdünnte ankommt. Die Verdichtung und die Verdünnung wird geringer sein, als sie sich in der Röhre bilden würden. Man nimmt gewöhnlich an, die Verdichtung δ sei an dem offenen Ende immer Null, was aber der Natur der Sache nicht entspricht, wesshalb auch die so erhaltenen Resultate mit den Erscheinungen, wie sie beobachtet werden, nur annähernd übereinstimmen können.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen können in die Form gebracht werden

$$u = b f_{x-bt} - b F_{x+bt},$$

$$\delta = f_{x-bt} + F_{x+bt}.$$

Setzt man

$$u' = b f_{x-bt} \text{ und } \delta' = \frac{u'}{b},$$

und

$$u'' = -b F_{x+bt} \text{ und } \delta'' = -\frac{u''}{b},$$

so stellen u' und δ' die Geschwindigkeit und die Verdichtung in dem nach der Richtung der positiven x ankommenden Wellenzuge dar, welcher als gegeben betrachtet wird. Ist das offene Ende bei $x = 0$, so wird mit obiger Annahme für dieses $\delta = 0$, woraus

$$f_{-bt} = -F_{bt}$$

und wenn man $t + \frac{x}{b}$ für t setzt

$$F_{x+bt} = -f_{-x-bt}.$$

Hierdurch ist F für jedes negative x bekannt; es ist nämlich f_{x-bt} für jedes negative $x - bt$ bekannt, und kann für jeden positiven Werth von $x - bt$ gleich Null gesetzt werden. Ist z. B. für die negativen x

$$f_{x-bt} = s \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wo

$$\frac{\lambda}{\tau} = b$$

sein muss, so wird

$$F_{x+bt} = -s \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right),$$

und man hat für den reflectirten Wellenzug

$$u'' = bs \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{l}\right); \quad \delta'' = -\frac{u''}{b}.$$

Aus der Ueberdeckung beider Wellenzüge erhält man

$$u = 2bs \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \text{ und}$$

$$\delta = -2s \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass für $x = 0;\ -\frac{\lambda}{2};\ -2\frac{\lambda}{2};\ -3\frac{\lambda}{2} \ldots$ die Geschwindigkeiten ihre absolut grössten Werthe erhalten; dass aber für

$$-\frac{\lambda}{4};\ -\frac{3\lambda}{4};\ -\frac{5\lambda}{4};\ldots$$

die Geschwindigkeiten immer Null sind, hier also Schwingungsknoten entstehen, immer vorausgesetzt, dass t bereits gross genug ist.

Die Verdichtung wird wieder an den Schwingungsknoten am grössten und kleinsten, und ist immer Null bei x gleich

$$0;\ -\frac{\lambda}{2},\ -2\frac{\lambda}{2},\ -3\frac{\lambda}{2},\ldots..$$

Die aus einer verdichteten Welle entstehende reflectirte ist hier eine verdünnte, d. h. zu einem positiven δ' gehört ein negatives δ''.

Wellenbewegung in einer nach allen Richtungen unbegränzten Luftmasse von ursprünglich überall gleicher Dichte.

324. Setzt man wie bei der Bewegung in der cylindrischen Röhre die anfängliche Dichte gleich $\varDelta$, die Dichte in einem Luftelemente, das ursprünglich bei x, y, z war und zur Zeit t bei $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ ist, gleich $\varDelta(1+\delta)$ und setzt man voraus δ und ξ, η, ζ bleiben während der ganzen Bewegung so klein, dass man ihre Quadrate oder Producte vernachlässigen kann; setzt man ferner voraus, es seien keine äusseren Kräfte vorhanden; so geben die Gleichungen von Lagrange (56)

$$\frac{dp}{dx}+\varDelta\frac{d^2\xi}{dt^2}=0;\quad \frac{dp}{dy}+\varDelta\frac{d^2\eta}{dt^2}=0;$$
$$\frac{dp}{dz}+\varDelta\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0,$$

und die Gleichung (57)

$$1+\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=\frac{1}{1+\delta},$$

woraus mit obiger Annäherung

$$-\delta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}. \tag{a}$$

Die Gleichung (c, Nro. 319) gibt ferner mit

$$k(a+\theta)\frac{c}{c_1}=b^2 \tag{b}$$

$$\frac{dp}{dx}=b^2\varDelta\frac{d\delta}{dx};\quad \frac{dp}{dy}=b^2\varDelta\frac{d\delta}{dy};\quad \frac{dp}{dz}=b^2\varDelta\frac{d\delta}{dz},$$

womit die Gleichungen (a) werden

$$b^2\frac{d\delta}{dx}=-\frac{d^2\xi}{dt^2};\quad b^2\frac{d\delta}{dy}=-\frac{d^2\eta}{dt^2};\quad b^2\frac{d\delta}{dz}=-\frac{d^2\zeta}{dt^2}. \tag{c}$$

325. Setzt man

$$b^2\delta=-\frac{d\varphi}{dt}, \tag{d}$$

wo φ eine Function von x, y, z und t sein wird, so werden die Gleichungen (c)

$$\frac{d^2\varphi}{dt\,dx}=\frac{d^2\xi}{dt^2};\quad \frac{d^2\varphi}{dt\,dy}=\frac{d^2\eta}{dt^2};\quad \frac{d^2\varphi}{dt\,dz}=\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

woraus die Geschwindigkeiten nach den Coordinatenaxen

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\varphi}{dx};\quad \frac{d\eta}{dt}=\frac{d\varphi}{dy};\quad \frac{d\zeta}{dt}=\frac{d\varphi}{dz} \tag{e}$$

werden, wobei im Allgemeinen zu jedem der Ausdrücke rechts noch eine Function von x, y, z als Integrationsconstante nach t zu setzen ist. Weil aber bei einer periodischen Bewegung, wie sie hier betrachtet werden soll, die Componenten der Geschwindigkeit keine von t unabhängigen Glieder enthalten können, so sind diese Ausdrücke hier Null zu nehmen, und für diese periodische Bewegung existirt also eine Geschwindigkeitsfunction φ, welche hier zugleich durch die Gleichung (d) die Verdichtung angibt, also die ganze Lösung der Aufgabe. Leitet man die Gleichung (a) nach t ab, so erhält man zur Bestimmung dieser Function

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=b^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \tag{f}$$

325. Ein particuläres Integral dieser Gleichung ist

$$\varphi = A\sin(at+s),$$

wo

$$s=m(x-\alpha)+n(y-\beta)+p(z-\gamma) \tag{g}$$

sein soll, und A, m, n, p, α, β, γ constant. Die Differentialgleichung (f) gibt die Bedingungsgleichung

$$a^2=b^2(m^2+n^2+p^2).$$

Setzt man

$$m=l\cos(l,x);\quad n=l\cos(l,y);\quad p=l\cos(l,z),$$

so wird diese Gleichung

$$a^2=b^2l^2 \text{ oder } a=\pm bl.$$

Setzt man ferner

$$x-\alpha=r\cos(r,x);\quad y-\beta=r\cos(r,y);\quad z-\gamma=r\cos(r,z),$$

wo also r die Entfernung der Punkte x, y, z und α, β, γ ist, so wird

$$s = l r \cos(l, r),$$

und

$$\varphi = A \sin l [r \cos(l, r) + b t] + A_1 \sin l [r \cos(l, r) - b t]. \qquad (h)$$

Setzt man s oder $l r \cos(l, r)$ constant, so ist die Gleichung (g) die Gleichung einer Ebene, welche normal auf l steht. Diese Ebene geht durch den Punkt α, β, γ, wenn s gleich Null ist; für einen andern Werth von s ist $\frac{s}{l}$ oder $r \cos(l, r)$ die Entfernung dieser zweiten Ebene von der durch α, β, γ gehenden.

Die Gleichung (h) zeigt, dass der Bewegungszustand für einen bestimmten Werth von t derselbe ist, wenn $r \cos(l, r)$ constant ist, d. h. in allen Punkten einer zu l normalen Ebene ist zu derselben Zeit derselbe Schwingungszustand vorhanden, und für zwei parallele Ebenen derselbe, für welche

$$l r \cos(l, r) = 2\pi,$$

oder

$$r \cos(l, r) = \frac{2\pi}{l}$$

ist. Diese Entfernung ist die Wellenlänge; sie sei λ.

In derselben Ebene wiederholt sich derselbe Bewegungszustand so oft $l b t$ um 2π wächst, das heisst je nach der Zeit

$$\tau = \frac{2\pi}{l b} = \frac{\lambda}{b},$$

welche Zeit die Oscillationsdauer ist. Aus diesem Werthe sieht man zugleich, dass diese Bewegung mit der Geschwindigkeit b fortschreitet, und zwar in dem ersten Gliede von der durch x, y, z gehenden Ebene gegen die durch α, β, γ gehende oder dem $r \cos l, r$ entgegen, in dem zweiten in dieser Richtung.

Die Schwingungsrichtung findet man aus

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} = A \cos(a t + s) m = A l \cos(a t + s) \cos(l, x),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = A l \cos(a t + s) l \cos(l, y); \; \frac{d\zeta}{dt} = A l \cos(a t + s) \cos(l, z),$$

als gleich gerichtet mit l, der Normalen zu den Ebenen des gleichzeitigen gleichen Bewegungszustandes, der Wellenebenen.

Die Bewegung, welche das oben gegebene particulare Integral angibt, besteht hiernach in dem Fortschreiten von zwei Zügen von

Wellenebenen, von welchen der eine in der Richtung von l, der andere dem entgegen geht; die Schwingungen erfolgen in der Richtung von l, normal zur Wellenebene, und das Fortschreiten der Wellenebene geschieht mit der Geschwindigkeit b, wie wir diese für die cylindrische Röhre fanden, wie überhaupt die hier betrachtete Bewegung sich in nichts von der Bewegung in der cylindrischen Röhre unterscheidet.

Man hätte das Resultat noch etwas verallgemeinern können, indem man für l in jedem der beiden Glieder von φ verschiedene Werthe angenommen hätte, wodurch für die entgegengesetzt laufenden Wellenzüge die Oscillationsdauer und die Wellenlänge verschieden geworden wäre, die Geschwindigkeit des Fortschreitens b aber dieselbe geblieben wäre.

Die Richtung der Wellenebenen ist die willkührlich gewählte l; ebenso sind die Amplituden A, A_1 und die Oscillationsdauer τ willkührlich; welch' letztere von der willkührlichen Länge l abhängt. Wegen der linearen Form der Differentialgleichung (f) ist die Summe unendlich vieler solcher Ausdrücke, wie oben einer gegeben ist, ebenfalls ein Integral dieser Gleichung, oder es können sich ebene Wellen von jeder Richtung, Amplitude und Wellenlänge, in dem Luftraume durchkreuzen. Die Geschwindigkeit eines Lufttheilchens an irgend einer Stelle nach einer bestimmten Richtung ergibt sich als die Summe der Geschwindigkeiten nach dieser Richtung, welche jede einzelne ebene Wellenbewegung nach dieser Stelle zu der betrachteten Zeit gebracht hat, und ebenso ist die Verdichtung an dieser Stelle die Summe der Verdichtungen aller dort sich kreuzenden ebenen Wellen. Allen diesen Wellenbewegungen gemeinschaftlich ist aber die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Wellen, welche für alle das in Nro. 321 bestimmte b ist.

326. Betrachtet man den Punkt x, y, z als den Durchkreuzungspunkt ebener Wellen, welche nach allen Richtungen gehen, so wird jede dieser Wellen in der Zeit t um bt fortschreiten, und also die Bewegung und die Verdichtung, welche in x, y, z zur Zeit $t = 0$ ist, nach der Zeit t auf eine Kugelfläche vom Halbmesser $r = bt$ übertragen sein. Die Bewegungsrichtung ist hierbei, so weit sie von der in x, y, z zur Zeit t bestehenden Bewegung herrührt, in der

Richtung von r. Man kann also jeden Punkt der von Wellen durchkreuzten Luftmasse als die Erregungsstelle von kugelförmigen Wellen betrachten; und die Bewegung an einem Punkte α, β, γ wird man erhalten, wenn man untersucht, welche Bewegungen zu der betrachteten Zeit von allen Punkten einer Fläche, welche die Luftmasse beliebig durchschneidet, und für welche die Bewegungszustände bekannt sind, nach jenem Punkte durch solche von ihnen ausgehende Kugelwellen gebracht worden sind. Die Resultirende aus diesen Bewegungen wird die Bewegung in α, β, γ zu dieser Zeit angeben. Gegeben muss hier der Werth von φ sein für eine gegebene Fläche, z. B. für die Ebene $z = 0$, nebst den Geschwindigkeiten, welche zur Zeit t den Lufttheilchen in dieser Ebene zukommen, also die Ableitungen von φ nach x, y, z für z gleich Null. Diese Bewegung muss sich als durch die Durchkreuzung ebener Wellen hervorgebracht, darstellen lassen, und daraus wird man die Amplituden der verschieden gerichteten ebenen Wellen und ihre Wellenlänge ableiten können, woraus sich dann durch die oben gegebene Betrachtung die Bewegung an irgend einer Stelle und zu irgend welcher Zeit ergibt. In ähnlicher Weise hat zuerst Huyghens die Wellenbewegung in einem Raume betrachtet.

Der Beharrungszustand.

327. Bewegt sich eine Flüssigkeit so, dass an jedem Punkte x, y, z die Geschwindigkeit und Richtung des zur Zeit t dort befindlichen Flüssigkeitselementes unabhängig von der Zeit, also zu allen Zeiten dieselben sind, so sagt man, die Flüssigkeit sei in einem Beharrungszustande oder permanenten Zustande.

Die Bahnen der nach einander durch denselben Punkt gehenden Flüssigkeitstheilchen werden hierbei dieselben sein. Ist s die Bahn eines solchen Theilchens, δs ein Element in der Richtung dieser Bahn gemessen; betrachtet man ein prismatisches Element der Flüssigkeit, dessen Länge jenes δs ist, und dessen Querschnitt rechtwinklich auf δs gleich dq; ist p die Pressung am Anfange dieses Elementes, und

$$p + \frac{dp}{ds}\delta s$$

die Pressung in der zweiten Endfläche, so ist die aus diesen Pressungen sich ergebende bewegende Kraft auf das Element in der Richtung von δs

$$-\frac{dp}{ds}\delta s\, dq.$$

Ist f die auf die Einheit der Masse an dieser Stelle wirkende äussere Kraft, ist Δ die Dichte der Flüssigkeit eben da, so ergibt sich für das betrachtete Element hieraus die bewegende Kraft in der Richtung von δs

$$\Delta f \cos(f, ds)\, q\, \delta s$$

und wenn endlich ds die Verschiebung des Elementes oder seines Schwerpunktes in der Zeit dt bedeutet, so ist

$$-\frac{dp}{ds} + \Delta f \cos(f, ds) = \Delta \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = v\, dt,$$

wenn man die Geschwindigkeit des Elementes in seiner Bahn gemessen mit v bezeichnet, so erhält man links dp, und dieses dp ist die ganze Aenderung von p für die Verschiebung des Elementes um ds, da p wegen des Beharrungszustandes unabhängig von t ist. Damit wird obige Gleichung

$$-dp + \Delta f \cos(f, ds)\, ds = \Delta v\, dv.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn 0 und s zwei Punkte in der Bahn des betrachteten Elementes bedeuten an denen p_0 und p die Pressungen, v_0 und v die Geschwindigkeiten sind

erstlich, wenn Δ constant ist, für eine tropfbare Flüssigkeit

$$p_0 - p + \Delta \int_0^s f \cos(f, ds)\, ds = \frac{1}{2}\Delta v^2 - \frac{1}{2}\Delta v_0^2 \qquad (a)$$

und wenn zweitens für eine elastische Flüssigkeit (Nro. 299)

$$p = k\Delta(a + \theta)$$

ist,

$$k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p} + \int_0^s f \cos(f, ds)\, ds = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2. \qquad (b)$$

Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist daher die Arbeit der bewegenden äusseren Kraft, welche auf die Einheit der Masse während ihrer Bewegung verwendet wird, gleich der von dieser Masse gewonnenen lebendigen Kraft mehr der Zunahme der Pressung vom Anfange der betrachteten Bahn bis ans Ende des betrachteten Stückes derselben, diese Pressungen dividirt durch die Masse in der Volumeinheit der Flüssigkeit.

Bei elastisch flüssigen Körpern hat man diese Differenz der Pressungen dividirt durch die Masse durch den Ausdruck

$$k(a+\theta)\ln\frac{p}{p_0}$$

zu ersetzen, wobei vorausgesetzt ist, dass die Temperatur in der Luftmasse überall dieselbe ist.

328. Nimmt man bei dem obigen Elemente der Flüssigkeit eine der Seitenflächen des als parallelepipedisch betrachteten Elementes normal zu dem Krümmungshalbmesser der Bahn an der betrachteten Stelle, bezeichnet man diesen mit ϱ, so erhält man in gleicher Weise wie in vorhergehender Nummer

$$-\frac{dp}{d\varrho}+\varDelta f\cos(f,\varrho)=-\varDelta\frac{v^2}{\varrho};$$

und wenn n die Richtung rechtwinklich auf ϱ und auf ds bedeutet

$$-\frac{dp}{dn}+\varDelta f\cos(f,n)=0.$$

Die Zunahme des Drucks in der Richtung des Krümmungshalbmessers der Bahn vom Krümmungsmittelpunkte weg gemessen, ist daher gleich der auf die Schichte von der Dicke $d\varrho$ und dem Querschnitte 1 wirkenden äusseren Kraft zerlegt nach der Verlängerung von ϱ, mehr der Centrifugalkraft eben dieser Schichte; normal auf die Osculationsebene der Bahn ist dagegen die Zunahme des Drucks von einer Fläche zur nächsten nur gleich der in dieser Richtung liegenden Componenten der äusseren Kraft, welche die zwischen jenen Flächen liegende Schichte Flüssigkeit angreift, wobei der Querschnitt der Schichte wieder auf eins reducirt wird.

Es ist zu bemerken, dass die Gleichungen (a) und (b) auch gelten, wenn man nicht in der Bahn eines Theilchens der Flüssigkeit, sondern beliebig von einem Punkte der Flüssigkeit zu einem

beliebigen andern fortgeht, wie diess die Gleichungen (Nro. 310, 63) ergeben, wenn man dort die Ableitungen der Geschwindigkeit nach t allein gleich Null setzt. Statt des Gliedes

$$\int f \cos(f, s)\, ds \text{ erhält man dann}$$

$$\int (f_x dx + f_y dy + f_z dz),$$

welches der Druck ist, welchen die Kraft f von der einen Stelle bis zur andern in der ruhenden Flüssigkeit hervorbringen würde, wobei aber, wenn die Bahn, auf der man von einer Stelle zur andern kommt, gleichgiltig sein soll, wie diess hier der Fall sein muss, die Kraft durch eine Kraftfunction gegeben sein muss. Andernfalls ist ein permanenter Zustand der Bewegung nicht möglich. Dieselbe Bedingung haben wir bei constanter Dichte für die Möglichkeit des Gleichgewichtes gefunden. Zu übersehen ist hierbei nicht, dass die Gleichung in Nro. 310 nur gilt, wenn eine Geschwindigkeitsfunction für die betrachtete Bewegung vorhanden ist.

329. Weil unter dieser Voraussetzung die Gleichung

$$-dp + \Delta f \cos(f, ds)\, ds = \Delta v\, dv$$

für jedes Stück ds, um das man von x, y, z fortgeht, gilt, so kann man sie mit der andern

$$-dp + \Delta f \cos(f, \varrho)\, d\varrho = -\Delta \frac{v^2}{\varrho} d\varrho$$

combiniren, indem man ds und $d\varrho$ gleich setzt, d. h. also nach dem Krümmungshalbmesser der Bahn fortgeht. Man erhält so

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\varrho}{\varrho}$$

und also

$$v = \frac{a}{\varrho},$$

wo a eine Constante ist, so lange man in der Linie normal auf die Bewegung bleibt; von einer solchen Linie zur andern kann sich a aber ändern. In einer solchen Linie ist daher die Geschwindigkeit dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, und wird somit Null, wenn dieser Krümmungshalbmesser ∞ wird oder die Bahn eine gerade, vorausgesetzt, dass hier nicht auch a gleich ∞

ist; im letzten Falle wird für alle Punkte normal auf die Bahn eines Theilchens der Krümmungshalbmesser der Bahn unendlich gross, diese Theilchen werden sich also geradlinig bewegen.

Ausfluss einer tropfbaren Flüssigkeit aus einem Gefässe.

330. Ist die Pressung an der Oberfläche der Flüssigkeit in dem Gefässe gleich A und ausserhalb der Ausflussöffnung ebenso A, etwa der Druck der Atmosphäre, und ist h die Höhe der Oberfläche über der Ausflussöffnung, so erhält man für den Strahl, welcher an dem Rande der Ausflussöffnung austritt, nach Formel (a)

$$v^2 = v_0{}^2 + 2\,g\,h,$$

wenn v_0 die Geschwindigkeit ist, welche den Wassertheilchen dieses Strahls an der Oberfläche zukommt. Gewöhnlich vernachlässigt man nun die Verschiedenheit der Pressung im Innern des austretenden Strahls und lässt daher obige Gleichung für alle Punkte der Ausflussöffnung gelten, was nicht ganz richtig ist.

Man sieht aus obiger Formel, dass die Ausflussgeschwindigkeit unabhängig ist von der Dichte der Flüssigkeit; ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche im Gefässe nahezu Null, oder bei einem unendlich weiten Gefässe Null, so ist die Geschwindigkeit des Ausflusses, die, welche der Fallhöhe h zukommt.

Ist da ein Element der Ausflussöffnung und θ die Neigung der durch dieses Element ausströmenden Flüssigkeit gegen die Normale zur Ausflussöffnung, so ist

$$\int v \cos\theta\, d a,$$

das Integral über die ganze Oeffnung ausgedehnt, die in der Zeiteinheit austretende Flüssigkeitsmenge. Gewöhnlich setzt man diese gleich

$$\varkappa a v$$

wo a die Grösse der Ausflussöffnung und $\varkappa$ ein durch die Erfahrung bestimmter Ausflusscoefficient ist, welcher bei einer Oeffnung in dünner Wand, von welcher sich der Strahl nach allen Seiten ablöst, nahe gleich 0,62 ist, übrigens nicht ganz unabhängig von Form und Grösse der Oeffnung, wie von der Druckhöhe.

Solche Formeln, wie die hier für die Ausflussmenge gegebene

$\varkappa a v$ stellt die **Hydraulik** auf, indem sie die Form der Formel so weit als möglich nach den theoretischen Sätzen bestimmt, dann aber sich durch wahrscheinliche Annahmen zu dem Endresultate, das die Anwendungen verlangen, verhilft, und endlich die in diesen Formeln als constant angenommenen Grössen, oben $\varkappa$, durch die Beobachtung zu bestimmen sucht; fallen diese Grössen in der That constant aus, so bestätigt die Erfahrung die Annahme, andernfalls hat man zu versuchen durch andere Annahmen der Erfahrung zu entsprechen. Die Hydraulik sucht also auf dem Wege des Experimentes die für die Anwendungen wichtigen Fragen, für welche die Hydrodynamik zur Zeit nock keine vollständige, oder für die Anwendungen brauchbare Antwort gibt, zu lösen. Diess ist um so nothwendiger, da ja die Hydrodynamik selbst über die Natur der Flüssigkeiten Annahmen macht, welche den Flüssigkeiten in der Natur nicht vollkommen entsprechen (Nro. 286).

Der Stoss eines isolirten Wasserstrahls.

331. Trifft ein Wasserstrahl eine feste Platte, so breitet er sich über diese aus, und fliesst längs dieser Platte ab; bei dieser Ablenkung wird im Innern des fliessenden Wassers eine Parthie ruhendes Wasser sein, über welches, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, der Strahl wie über eine gekrümmte Wand abfliesst, und dabei einen von der Krümmung abhängigen Druck auf die Wand dieses Wasser ausübt. Dieser Druck wird durch das an der Platte ruhende Wasser auf diese übertragen, und den Gesammtdruck, welchen so die Platte erleidet, nennt man den **Stoss** des dieselbe treffenden Wasserstrahls.

Der grösseren Einfachheit wegen nehmen wir an, das Wasser trete aus einer sehr langen rechteckigen Oeffnung in dem horizontalen Boden eines Gefässes, und betrachten die Bewegung in einem Querschnitte, welcher nahe durch die Mitte der Oeffnung rechtwinklich auf deren lange Seiten gelegt ist. Von dieser Bewegung setzen wir voraus, dass sie durch die kurzen Enden der Oeffnung nicht beeinflusst wird, so dass also die Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens in der Ebene des betrachteten Querschnitts liegt. In dieser Ebene sei z die verticale und x die horizontale Coordinate

eines Wassertheilchens zur Zeit t, v die Geschwindigkeit dieses Theilchens, ϱ der Krümmungshalbmesser seiner Bahn; und p die Pressung an dieser Stelle; beachtet man dann die Arbeit der Schwere auf der kurzen Strecke, in welcher der Stoss geschieht nicht, so hat man allgemein für zwei beliebige Punkte

$$p - p_0 = -\frac{1}{2}\Delta(v^2 - v_0{}^2),$$

und für das Fortgehen normal zur Bahn

$$\frac{dp}{d\varrho} = \Delta\frac{v^2}{\varrho} \text{ und } v = \frac{a}{\varrho},$$

wo a in diesem Fortgehen constant ist.

In dem äussersten Wasserfaden ist der Druck constant, der Druck der Luft, welcher p_0 sein soll. Damit gibt die erste Gleichung die Geschwindigkeit in diesem äussersten Wasserfaden constant; sie sei v_0.

Im Innern ist ruhendes Wasser, also Wasser im Gleichgewichte; dort muss also die Pressung auch constant sein; sie sei p' und in dem innersten über diesen ruhenden Wasserkörper abfliessenden Wasserfaden muss also die Geschwindigkeit ebenfalls constant sein; sie sei v'. Dann ist die Pressung, welche in dem ruhenden Wasserkörper im innern des ausgebreiteten Strahls sich findet, gegeben durch

$$p' - p_0 = \frac{1}{2}\Delta(v_0{}^2 - v'^2). \qquad \text{(a)}$$

Ist nun l die Länge, in welcher dieser ruhende Wasserstrahl in dem betrachteten Querschnitte die Stossplatte berührt, so ist der Druck, welchen diese von dem Wasser erleidet, wenn b die Breite des Wasserstrahls rechtwinklich auf diesen Querschnitt, oder die Länge der Ausflussöffnung ist

$$D = bl(p' - p_0) = \frac{1}{2}\Delta bl(v_0{}^2 - v'^2),$$

wobei der auf der andern Seite der Platte entgegenwirkende Luftdruck abgezogen ist.

Geht man von einem Punkte in der Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ um $d\varrho$ fort, so ist die in der Zeiteinheit durch dieses Element von der Länge 1 rechtwinklich auf $d\varrho$, fliessende Wassermenge

gleich $v\,d\varrho$ und die Wassermenge durch die ganze Dicke des fliessenden Wasserstrahls

$$\int v\,d\varrho = a\int\frac{d\varrho}{\varrho} = a\ln\frac{\varrho'}{\varrho_0} = a\ln\frac{v_0}{v'}.$$

Da diese Wassermenge überall dieselbe sein muss, und v_0 und v' constant sind, so ist a ebenfalls constant über den ganzen gekrümmten Wasserstrahl, also auch ϱ' und ϱ_0 constant, oder der Wasserstrahl ist durch zwei cylindrische Flächen von diesen Krümmungshalbmessern begrenzt. Geht man von dem äussersten Wasserfaden, dessen Geschwindigkeit v_0 ist, zum zweiten und ist $d\varrho$ die Dicke des ersten, so ist $v_0\,d\varrho$ die durch ihn fliessende Wassermenge; diese ist constant, daher auch $d\varrho$ constant. Damit wird dann die Pressung im zweiten

$$p_0 + dp = \varDelta\frac{v_0{}^2}{\varrho_0}d\varrho$$

ebenfalls constant, also auch die Geschwindigkeit in diesem, und so fort in jedem. Die Bahnen der einzelnen Wassertheilchen sind also alle parallel, und die Krümmungsmittelpunkte derselben gemeinschaftlich, oder die einzelnen Wasserfäden bilden concentrische cylindrische Flächen.

Der aus der Oeffnung tretende Strahl theilt sich in zwei Theile, von welchen der eine nach der Seite der positiven x, der andere nach der Seite der negativen x abfliesst, zwischen sich die ruhende Wassermasse lassend. In dem Theilungspunkte wird man zwei Krümmungshalbmesser haben, welche nach beiden Seiten hin in die Richtung der x Axe fallen. Sind nun ϱ'_0 und ϱ' die Krümmungshalbmesser des äussersten und innersten Fadens auf der einen, ϱ''_0 und ϱ'' auf der andern Seite, und ebenso die Geschwindigkeiten durch einen und zwei Accente unterschieden, so ist, weil die Pressung in der zwischen dem getheilten Strahle liegenden Wassermasse nur eine sein kann

$$p' - p_0 = \frac{1}{2}\varDelta(v'_0{}^2 - v'^2) = \frac{1}{2}\varDelta(v''_0{}^2 - v''^2),$$

und da bei dem Austritte aus der Oeffnung die Geschwindigkeiten in den Randfäden gleich gross, also $v'_0 = v''_0$ sein werden, $v' = v''$. Diess gibt

$$v' = \frac{a'}{\varrho'} = \frac{a''}{\varrho''} \text{ und } v_0 = \frac{a'}{\varrho'_0} = \frac{a''}{\varrho''_0},$$

woraus
$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{\varrho''_0}{\varrho'_0}.$$

Setzt man $\varrho'' = \varrho''_0 + \partial''$ und $\varrho' = \varrho'_0 + \partial'$, wo
$$\partial' + \partial'' = \partial$$
gleich der Dicke des ungetheilten Wasserstrahls an der Stelle, an der die Theilung eintritt, so hat man noch

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{\varrho''_0 + \partial''}{\varrho'_0 + \partial'} = \frac{\varrho''_0}{\varrho'_0}.$$

also auch
$$\frac{\partial''}{\partial'} = \frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{\varrho''_0}{\varrho'_0}.$$

Ist die Stossplatte gross genug, so werden die beiden Theile des Wasserstrahls parallel der Platte abfliessen. Ist l die Länge der Linie z von dem Theilungspunkte des Strahls bis zu der Stossplatte, und ist α der Winkel, welchen die Stossplatte mit der verlängerten z bildet, wobei der Platte eine solche Lage gegeben wird, dass dieser Winkel in die Ebene x, z fällt, so ist

$$\varrho' \tan\frac{\alpha}{2} = \varrho'' \cot\frac{\alpha}{2} = l,$$

woraus, wenn l gegeben ist, ϱ' und ϱ'' sich bestimmt. Aus beiden erhält man

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{\partial''}{\partial'} = \tan\frac{\alpha^2}{2},$$

und damit
$$\partial'\left(1 + \tan\frac{\alpha^2}{2}\right) = \partial,$$

$$\partial' = \partial \cos\frac{\alpha^2}{2}.$$

Die Grösse des Stosses auf die Stossplatte wird endlich

$$D = \frac{1}{2}\Delta b . 2l(v_0{}^2 - v'_2) =$$

$$= \Delta b\, v_0{}^2 \varrho' \tan\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\varrho_0{}^2}{\varrho'^2}\right) =$$

$$= \Delta b\, \partial\, v_0{}^2 \sin\alpha\left(1 - \frac{\partial \sin\alpha}{4l}\right),$$

was, wenn ∂ sehr klein gegen l ist, in

$$\varDelta b \partial v^2 \sin\alpha$$

übergeht.

Steht die Platte rechtwinklich gegen den Strahl, so wird $\sin\alpha = 1$ und der Stoss auf die Platte

$$\varDelta b \partial v^2 = 2\varDelta g b \partial h,$$

wenn man $v^2 = 2gh$ setzt. Der Stoss ist dann gleich dem Drucke einer schweren Flüssigkeitssäule vom Querschnitte $b\partial$ und der doppelten Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit zukommt.

Für die Wassermenge, welche in der Zeiteinheit ausfliesst, erhält man

$$A = b\left(a' \ln\frac{\varrho'}{\varrho'_0} + a'' \ln\frac{\varrho''}{\varrho''_0}\right) =$$

$$b(a' + a'') \ln\frac{\varrho'}{\varrho'_0}.$$

Es ist aber

$$\frac{a'}{\varrho_0} = v_0 \quad \text{oder } a' = v_0\left(l\cot\frac{\alpha}{2} - \partial\cos\frac{\alpha^2}{2}\right),$$

und
$$\frac{a''}{\varrho''_0} = v_0, \quad \text{oder } a'' = v_0\left(l\tan\frac{\alpha}{2} - \partial\sin\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Daraus erhält man

$$A = v_0 b\left(\frac{2l}{\sin\alpha} - \partial\right)\ln\frac{1}{1 - \frac{\partial}{2}\sin\alpha},$$

was für ein gegen ∂ sehr grosses l in

$$A = v_0 b \partial$$

übergeht. Die Ausflussmenge wird durch die Nähe der Stossplatte geändert.

Den Stoss auf eine Platte hätte man auch in der Weise behandeln können, wie die folgende Aufgabe behandelt ist.

Eine Röhre dreht sich gleichförmig um eine mit ihr fest verbundene Axe; durch sie fliesst Wasser. Das Drehmoment des Drucks dieses Wassers auf die Röhre anzugeben.

332. Die Drehaxe sei die Axe der z, w die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Röhre um die Axe dreht.

dm sei ein Element der in der Röhre befindlichen Wassermasse, welches sich zur Zeit t in der Entfernung r von der Drehaxe befindet; r bilde zu dieser Zeit mit einer durch die Drehaxe gehende Ebene, welche mit der Röhre fest verbunden ist, sich also mit dieser dreht, den Winkel ψ, diesen in der Richtung der Drehung w gemessen; so ist das statische Moment des Drucks auf das Element dm für die z Axe

$$dM = \frac{d\left[r^2\left(\frac{d\psi}{dt} + w\right)\right]}{dt} dm,$$

und also die Summe dieser Momente für alle zur Zeit t in der Röhre befindliche Wasserelemente

$$M = \int \frac{d\left[r^2\left(\frac{d\psi}{dt} + w\right)\right]}{dt} dm.$$

Beim Beharrungszustand ist dieser Moment constant nach der Zeit, wesshalb man hat

$$Mt = \left[\int r^2\left(\frac{d\psi}{dt} + w\right) dm\right]_t - \left[\int r^2\left(\frac{d\psi}{dt} + w\right) dm\right]_0 .$$

Das erste Integral ist die Summe der Flächengeschwindigkeiten aller zur Zeit t in der Röhre befindlichen Theile nebst der Summe der Flächengeschwindigkeiten der Wassertheile, welche während dieser Zeit die Röhre verliessen im Momente des Austrittes, weniger der Summe der Flächengeschwindigkeiten, welche die eintretenden Wassertheilchen hatten; das zweite Integral ist die Summe der Flächengeschwindigkeiten, welche die zur Zeit 0 in der Röhre befindlichen Wassertheilchen haben. Da beim Beharrungszustande diese Summe der ersten in dem ersten Integrale enthaltenen gleich ist, so heben sich diese beiden auf.

Ist q_1 die Grösse der Ausflussöffnung, r_1 die mittlere Entfernung derselben von der Drehaxe z; ist β_1 die Neigung des austretenden Strahls gegen die z Axe und α_1 der Winkel des verlängerten r_1 mit der Projection des Strahls auf die zu z normale Ebene, in der Richtung der Drehung gemessen, ist endlich v_1 die mittlere Austrittsgeschwindigkeit relativ gegen das Axensystem, das sich mit der Röhre dreht, so ist

$$\Delta q_1 v_1 t$$

die in der Zeit t ausgetretene Wassermasse, und für diese

$$v_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 = r_1 \frac{d\psi}{dt},$$

und damit der betreffende Theil des ersten Integrals

$$\Delta q_1 v_1 t [r_1 v_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 + r_1{}^2 w].$$

Für die eintretende Wassermenge seien dieselbe Grössen

$$q_0, v_0, \beta_0, \alpha_0, r_0,$$

und damit wird, weil noch

$$q_0 v_0 = q_1 v_1$$

sein muss,

$$M = \Delta q_0 v_0 [r_1 v_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 - r_0 v_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 + (r_1{}^2 - r_0{}^2) w].$$

Der Druck auf das Wasserelement dm setzt sich zusammen aus dem Drucke der umgebenden Wassertheile; die Schwerkraft ist vertical; ist diess die Axe z ebenfalls, so kommt diese bei dem Momente M nicht in Betracht. Da aber die Pressungen in einer Fläche jedenfalls paarweise und entgegengesetzt vorkommen, so werden sich die Momente dieser Pressungen gegenseitig aufheben, mit Ausnahme derer, welche an den Grenzflächen auftreten. Diese sind aber der Druck der Wände und die Pressungen auf die Eintritts- und die Austrittsöffnungen.

Nennt man das statische Moment des Drucks des fliessenden Wassers auf die Wände der Röhre $D\partial$; sind p_0 und p_1 die Pressungen in der Eintritts- und der Austrittsöffnung, so ist

$$M = -D\partial + p_0 q_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_1 - p_1 q_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1,$$

woraus man erhält

$$D\partial = p_0 q_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 - p_1 q_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 -$$
$$- \Delta q_0 v_0 [r_1 v_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 - r_0 v_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 + (r_1{}^2 - r_0{}^2) w]. \quad (a)$$

Sind mehrere solche Röhren, wie bei den Turbinen, zu einem Körper verbunden, und bilden die Ausflussöffnungen mit den hervorstehenden Enden der Röhren oder Schaufeln eine in sich geschlossene Fläche, welche dem Drucke p_1 ausgesetzt ist, so gibt dieser constante Druck auf diese geschlossene Fläche die Resultirende Null (Nro. 294), und daher kein Drehmoment. Dasselbe gilt von den Eintrittsöffnungen. Dadurch wird

$$D\partial =$$
$$-\Delta q_0 v_0 [r_1 v_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_1 - r_0 v_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_1 + (r_0^2 - r_1^2) w]. \quad \text{(b)}$$

Ist vor den Eintrittsöffnungen ein Behälter an dessen oberem Ende das Wasser als ruhend betrachtet werden kann, ist p_1 der Druck sowohl auf die Oberfläche dieses Wassers als der auf die Ausflussöffnungen; ist z die Tiefe der Eintrittsöffnungen unter dieser Oberfläche, so hat man

$$\Delta g z = p_0 - p_1 + \frac{1}{2}\Delta u_0^2,$$

wenn u_0 die absolute Geschwindigkeit des Wassers in der Eintrittsöffnung bezeichnet, und wenn keine Contraction und andere Widerstände, wie Stoss bei dem Eintritte statt finden. Treten aber solche auf, so hat man für u_0 zu setzen $\frac{u_0}{k}$, wo k ein Coefficient, welcher kleiner als 1 ist, und welcher von der Art des Eintritts abhängt. Damit wird

$$\Delta g z = p_0 - p_1 + \frac{1}{2}\Delta \frac{u_0^2}{k^2}.$$

Am Ende der Röhre ist der Druck wieder p_1; ist z_1 die Tiefe der Ausflussöffnung unter der Eintrittsöffnung, so ist für die relative Bewegung

$$\frac{1}{2}\Delta(r_1^2 - r_0^2)w^2 + \Delta g z_1 = p_1 - p_0 + \frac{1}{2}\Delta(v_1^2 - v_0^2),$$

wo das erste Glied die Arbeit der Centrifugalkraft ist.

Addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{1}{2}\Delta(r_1^2 - r_0^2)w^2 + \Delta g(z + z_1) = \frac{1}{2}\Delta\left[\frac{u_0^2}{k^2} + v_1^2 - v_0^2\right].$$

Es ist aber

$$u_0^2 = v_0^2 \cos\beta_0^2 + (v_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 + r_0 w)^2 + v_0^2 \sin\beta_0^2 \cos\alpha_0^2$$
$$= v_0^2 + 2 v_0 r_0 w \sin\beta_0 \sin\alpha_0 + r_0^2 w^2,$$

und wenn u_1 die absolute Austrittsgeschwindigkeit ist

$$u_1^2 = v_1^2 + 2 v_1 r_1 w \sin\beta_1 \sin\alpha_1 + r_1^2 w^2.$$

Daraus

$$v_1^2 - v_0^2 = u_1^2 - u_0^2 - 2 v_1 r_1 w \sin\beta_1 \sin\alpha_1 + 2 v_0 r_0 w \sin\beta_0 \sin\alpha_0 -$$
$$- r_1^2 w^2 + r_0^2 w^2.$$

Damit wird

$$g(z+z_1)=\frac{1}{2}\frac{u_0{}^2}{k^2}+\frac{1}{2}(u_1{}^2-u_0{}^2)-v_1\,r_1\,w\sin\beta_1\sin\alpha_1+$$
$$+v_0\,r_0\,w\sin\beta_0\sin\alpha_0-r_1{}^2w^2+r_0{}^2w^2.$$

Substituirt man dieses in die Gleichung (b), nachdem man diese mit w multiplicirt hat, so erhält man

$$D\partial w=\varDelta q_0\,v_0\left[g(z+z_1)-\frac{1}{2}u_0{}^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)-\frac{1}{2}u_1{}^2\right]. \quad (c)$$

$D\partial w$ ist die auf die Turbine in der Zeiteinheit übertragene Arbeit, und diese ist gleich dem Gewichte der in der Zeiteinheit durch die Turbine geflossene Wassermasse $\varDelta q_0 v_0 g$ multiplicirt mit der Höhe des ganzen Gefälles $z+z_1$, weniger der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}\varDelta q_0\,v_0\,u_1{}^2$, welche das austretende Wasser mitnimmt und weniger der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}\varDelta q_0\,v_0\,u_0{}^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)$, welche beim Eintritte in die Turbine verloren geht. Ist $k=1$, so fällt dieses letzte Glied weg.

Der Ausfluss der Gase.

333. Für den Fall einer constanten Temperatur gibt die Gleichung (b) in Nro. 327 die Geschwindigkeit des Ausflusses

$$v^2=2k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p},$$

wo p_0 die Pressung des Gases in dem Behälter und p die Pressung in der Ausflussöffnung ist, θ aber die Temperatur und k der in Nro. 299 näher bestimmte Coefficient.

Ist die Grösse der Ausflussöffnung a, so ist das Volum der in der Zeiteinheit ausgetretenen Gasmenge

$$a\,v,$$

wenn vorausgesetzt werden darf, dass alle zu der Oeffnung austretenden Gastheile die Geschwindigkeit v normal zu a haben. Ist diess wie gewöhnlich nicht der Fall, so multiplicirt man die Grösse av noch mit einem Ausfluss-Coefficienten $\varkappa$, welcher durch die Erfahrung bestimmt wird.

Dieses Volum Gas hat die Pressung p, die in der Ausfluss-

öffnung vorhanden. Will man das Volum der austretenden Gasmasse unter der Pressung p_0 berechnen, so hat man das erste Volum mit

$$\frac{p}{p_0}$$

zu multipliciren.

Für die Pressung p in der Ausflussöffnung setzt man gewöhnlich die Pressung, welche ausserhalb des Gefässes vorhanden ist, was aber nur bis zu einem bestimmten Werthe von p zulässig ist. Setzt man für p z. B. Null, berechnet man also auf diese Weise die Gasmenge, welche in der Zeiteinheit in den luftleeren Raum ausströmt, so erhält man dieses Volum gemessen unter dem Drucke p_0 gleich Null, was widersinnig ist. Ist, nachdem die Ausflussöffnung einige Zeit geöffnet war, die Geschwindigkeit der austretenden Luft grösser als die der vor der Ausflussöffnung abströmenden Luft, so muss vor der Ausflussöffnung eine Vermehrung der Verdichtung eintreten. Von dieser wissen wir, dass sie mit der Geschwindigkeit des Schalls fortschreitet. Die Verdichtung unmittelbar vor der Ausflussöffnung wird daher zunehmen, so lange die Geschwindigkeit des Ausflusses grösser ist als die Geschwindigkeit des Schalls, und so lange kann also auch kein Beharrungszustand eintreten. Dieser wird, wenn zuerst die Dichte vor der Mündung kleiner war, erst dann eintreten, wenn die Dichte an der Ausflussöffnung so gross geworden ist, dass die Geschwindigkeit des Ausströmens der Geschwindigkeit des Schalls gleich geworden ist, also wenn

$$2k(a+\theta)\ln\frac{p_0}{p} = k(a+\theta), \qquad \text{(Nro. 321, f)}$$

wo rechts der von der Erwärmung herrührende Factor $\frac{c}{c_1}$ weggelassen ist, weil hier die Temperaturänderung vernachlässigt ist. Man findet hieraus als den Grenzwerth von p

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}6065\, p_0 .$$

Ist die anfängliche Pressung ausserhalb des Ausflussgefässes kleiner als dieser Werth von p, so wird sich die Verdichtung vor dieser steigern, bis p diesen Werth hat, und nun erst der Beharrungszustand eintreten. Ist dagegen der Druck ausserhalb grösser

als $0{,}6065\,p_0$, so würde eine Verdichtung, die sich vor der Mündung bildet, schneller abfliessen, als die Luft nachfliesst; hier wird also der äussere Druck auch der Druck p in der Ausflussöffnung sein.

Gleichgewicht der Kräfte an elastischen Körpern.

334. Aendern die Punkte eines Körpers ihre gegenseitige Lage, so finden hierbei einige reingeometrische Bedingungen statt, welche für den Fall, dass die Verrückungen sehr klein sind, hier zuerst entwickelt werden sollen.

Der Punkt, dessen ursprüngliche Lage durch die rechtwinklichen Coordinaten x, y, z gegeben ist, sei durch die auf den Körper, dem er angehört, wirkenden Kräfte nach

$$x+\xi,\quad y+\eta,\quad z+\zeta$$

gebracht, wo ξ, η, ζ sehr klein sein sollen, und als Functionen von x, y, z gedacht werden. Dann werden sich für einen Punkt, dessen ursprüngliche Coordinaten

$$x+h,\quad y+k,\quad z+l$$

sind, die Verrückungen

$$\xi' = \xi + \frac{d\xi}{dx}h + \frac{d\xi}{dy}k + \frac{d\xi}{dz}l,$$

$$\eta' = \eta + \frac{d\eta}{dx}h + \frac{d\eta}{dy}k + \frac{d\eta}{dz}l,$$

$$\zeta' + \zeta + \frac{d\zeta}{dx}h + \frac{d\zeta}{dy}k + \frac{d\zeta}{dz}l$$

ergeben, wenn man die höheren Potenzen von h, k, l weglässt.

Setzt man die ursprüngliche Entfernung der beiden betrachteten Punkte gleich n, so ist

$$n^2 = h^2 + k^2 + l^2$$

und die jetzige Entfernung, welche $n(1+\varepsilon)$ sein soll, gegeben durch

$$n^2(1+\varepsilon)^2 = (h+\xi'-\xi)^2 + (k+\eta'-\eta)^2 + (l+\zeta'-\zeta)^2.$$

Lässt man in dieser Gleichung das Quadrat von ε gegen die erste

Potenz weg, und lässt man ebenso die Quadrate und Producte von $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$ etc. weg, so erhält man die genäherte Gleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon n^2 = h^2\frac{d\xi}{dx} + k^2\frac{d\eta}{dy} + l^2\frac{d\zeta}{dz} \\ + hk\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right) + hl\left(\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}\right) \\ + kl\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{dz}{dy}\right). \end{aligned} \tag{a}$$

ε ist hierbei die lineare Ausdehnung des Körpers in der Richtung n bezogen auf die Längeneinheit; ist ε negativ, so findet in der Richtung n Zusammendrückung statt. Fällt n mit einer der Richtungen z. B. x zusammen, so werden k und l gleich 0 und $n = h$, womit

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}$$

wird, was also die lineare Ausdehnung in der Richtung x ist.

Setzt man $\varepsilon n^2 = \pm 1$, so wird die Gleichung (a) die einer Fläche des zweiten Grades, deren Coordinaten h, k, l sind, und welche ganz die Form der Gleichung (f) Nro. 279 hat.

Wählt man die Coordinatenaxen der x, y, z so, dass diese Fläche auf ihre Axen bezogen erscheint, so wird ihre Gleichung

$$\pm 1 = \frac{d\xi}{dx}h^2 + \frac{d\eta}{dy}k^2 + \frac{d\zeta}{dz}l^2 \tag{b}$$

und für diese Axen ist

$$\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}=0;\ \frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}=0;\ \frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}=0. \tag{c}$$

Diese Axen enthalten den grössten und kleinsten Werth von n, und also auch den grössten und kleinsten Werth von ε, da dieses durch

$$\varepsilon = \pm\frac{1}{n^2}$$

gegeben ist.

Bezeichnet man die drei Werthe von ε, welche diesen Axen entsprechen unter dem Namen der Hauptausdehnungen mit

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,$$

so wird die obige Gleichung (b)

$$\pm 1 = \varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 k^2 + \varepsilon_3 l^2$$

und es ist
$$\varepsilon_1 = \frac{d\xi}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{d\eta}{dy}; \quad \varepsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz}.$$

Ein Parallelepiped, das ursprünglich das Volum hkl hatte, wird jetzt das Volum

$$h(1+\varepsilon_1)k(1+\varepsilon_2)l(1+\varepsilon_3)$$

haben, oder die Einheit des Volums ist jetzt in

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

ausgedehnt, so dass die Volumsausdehnung mit Weglassung der höheren Potenzen gleich

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{c}$$

annähernd gesetzt werden kann; diess ist die kubische Ausdehnung an der Stelle, welche ursprünglich bei x, y, z war.

Für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ kann man allgemein die Summe dreier Ausdehnungen setzen, welche in demselben Punkte nach drei aufeinander rechtwinklichen Richtungen stattfinden, welche Summe für denselben Punkt constant ist, wovon man sich mit Hilfe der Gleichung (a) auf dem in Nro. 276 eingeschlagenen Wege überzeugt.

335. Für **elastische** Körper zeigt die Erfahrung, dass ein Zug nach einer Richtung eine Ausdehnung in dieser Richtung bewirkt, welche der Spannung in dieser Richtung proportional ist, wenn nur diese Ausdehnung klein genug ist, dass aber zugleich normal auf diese Richtung eine Zusammenziehung eintritt, welche ebenfalls proportional jener Spannung ist.

Bei den **isotropen** Körpern ist das Verhältniss zwischen der Ausdehnung in der Richtung des Zugs zu der Spannung unabhängig von der Richtung des Zugs; bei den **anisotropen** Körpern ist das aber nicht der Fall. Wir betrachten einen **isotropen** Körper, und nehmen an, dieser sei in der Richtung der x Axe einem Zuge unterworfen, welcher die Spannung X in jeder zu x normalen Fläche hervorruft; diese sei begleitet von einer Ausdehnung e in dieser Richtung und einer Ausdehnung, welche negativ werden wird, pe in der Richtung von y und derselben in der Richtung von z; dann wird man setzen können

$$X = Ee.$$

Erfolgen ebenso durch die Spannungen Y und Z in den Richtungen von y und z die Ausdehnungen e′ und e″, so hat man ferner

$$Y = E e' \text{ und } Z = E e''.$$

Nun wird, wenn alle drei Züge zugleich stattfinden, und die Ausdehnungen sich addiren, was man für sehr kleine Ausdehnungen annehmen muss, die Ausdehnung in der Richtung der x Axe sein

$$\varepsilon_1 = e + p(e' + e''),$$

und ebenso nach y und nach z

$$\varepsilon_2 = e' + p(e + e''); \quad \varepsilon_3 = e'' + p(e + e').$$

Aus diesen findet man

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1 + 2p)(e + e' + e'') = \delta,$$

wo δ die cubische Ausdehnung ist. Dann findet man

$$\frac{p}{(1+2p)(p-1)}\delta - \frac{1}{p-1}\varepsilon_3 = e'',$$

und das analoge für e′ und e. Daraus ergibt sich

$$X = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_1; \; Y = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_2; \; Z = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_3, \qquad \text{(d)}$$

wenn man

$$\frac{Ep}{(1+2p)(p-1)} \text{ durch } \lambda \text{ und } -\frac{E}{p-1} \text{ durch } 2\mu$$

ersetzt.

X, Y, Z sind hierbei die Hauptspannungen (Nro. 280); die Normalspannung in einer Richtung n findet man nach Nro. 278 gleich

$$N_n = X\cos(n,x)^2 + Y\cos(n,y)^2 + Z\cos(n,z)^2$$

während man die Ausdehnung nach dieser Richtung (Nro. 334)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos(n,x)^2 + \varepsilon_2 \cos(n,y)^2 + \varepsilon_3 \cos(n,z)^2$$

hat. Substituirt man für X, Y, Z die oben gefundenen Werthe, so erhält man

$$N_n = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon \qquad \text{(e)}$$

allgemein für jede Richtung n.

Geht man nun von beliebigen Coordinatenaxen x, y, z aus, von welchen nicht mehr vorausgesetzt sein soll, dass sie mit den Hauptausdehnungsaxen zusammenfallen, so hat man für die Normalspannung zu n aus (Nro. 278)

$$N_n = X_x \cos(n,x)^2 + Y_y \cos(n,y)^2 + Z_z \cos(n,z)^2$$
$$+ 2X_y \cos(n,x)\cos(n,y) + 2X_z \cos(n,x)\cos(n,z)$$
$$+ 2Y_z \cos(n,y)\cos(n,z).$$

Setzt man hier für N_n seinen Werth $\lambda\delta + 2\mu\varepsilon$ und für X_x, Y_y, Z_z nach derselben Gleichung (e)

$$\lambda\delta + 2\mu\frac{d\xi}{dx};\ \lambda\delta + 2\mu\frac{d\eta}{dh};\ \lambda\delta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}, \tag{63}$$

während man ε aus Nro. 334 gleich

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}\cos(n,x)^2 + \frac{d\eta}{dy}\cos(n,y)^2 + \frac{d\zeta}{dz}\cos(n,z)^2$$
$$+ \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos(n,x)\cos(n,y)$$
$$+ \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\cos(n,x)\cos(n,z)$$
$$+ \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\cos(n,y)\cos(n,z)$$

setzt, so erhält man

$$X_y \cos(n,x)\cos(n,y) + X_z \cos(n,x)\cos(n,z) +$$
$$+ Y_z \cos(n,y)\cos(n,z) =$$
$$= \mu\left[\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos(n,x)\cos(n,y) +\right.$$
$$+ \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\cos(n,x)\cos(n,z) +$$
$$\left.+ \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\cos(n,y)\cos(n,z)\right],$$

was weil die Coefficienten unabhängig von der Richtung n sind in

$$X_y = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right);\ X_z = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right);$$
$$Y_z = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) \tag{64}$$

zerfällt.

Die Gleichungen (63) und (64) drücken die Componenten der Spannungen durch die hervorgebrachten Verschiebungen aus.

336. Ehe wir weiter gehen, soll hier bemerkt werden, dass der oben mit E bezeichnete Coefficient der linearen Ausdehnung durch einen Zug bei den Mechanikern gewöhnlich der Elasticitätsmodul heisst. Eliminirt man p zwischen den beiden Ausdrücken für λ und μ, so erhält man

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} . \tag{f}$$

Der reciproke Werth hiervon heisst der Elasticitäts-Coefficient des betrachteten Körpers.

Die Ausdehnung normal auf die Zugrichtung ist oben mit pe bezeichnet; hier ist

$$p = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} .$$

Ist ein Körper nach allen Seiten gleich gespannt, also $X = Y = Z$, so ist die lineare Ausdehnung

$$\varepsilon_1 = (1 + 2p)e = (1 + 2p)\frac{X}{E} ,$$

woraus

$$X = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon_1$$

wird. Eine Beobachtung dieser linearen Ausdehnung nebst der Beobachtung des Elasticitätsmoduls dient daher dazu, die Coefficienten λ und μ für die betrachtete Substanz zu bestimmen.

337. Die Gleichgwichtsbedingungen und die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus den Gleichungen (53, Nro. 272), indem man dort für X, Y, Z die hier bestimmten Werthe und für Gleichgewicht die Beschleunigungen gleich Null setzt. Man erhält so nach einer kleinen Umformung die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{d\delta}{dx} + \mu\left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right] + \Delta f_x = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\delta}{dy} + \mu\left[\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right] + \Delta f_y = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{d\delta}{dz} + \mu\left[\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right] + \Delta f_z = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Bei den Anwendungen sind entweder die Verschiebungen als Functionen der x, y, z bekannt, und man sucht die in der Oberfläche des Körpers vorhandene Spannungen, welche diese

Verschiebungen hervorbringen, oder es sind diese Spannungen bekannt und man sucht die Verschiebungen, was aber bis jetzt in den wenigsten Fällen gelungen ist.

338. Ist gegeben

$$\xi = a x; \ \eta = b y; \ \zeta = c z$$

für einen Körper, dessen Masse nicht durch Kräfte angegriffen ist, so hat man

$$\frac{d\xi}{dx} = a; \ \frac{d\eta}{dy} = b; \ \frac{d\zeta}{dz} = c$$

und alle übrigen Ableitungen gleich Null. Daraus hat man

$$\delta = a + b + c$$

und

$$X_x = \lambda(a + b + c) + 2\mu a,$$
$$Y_y = \lambda(a + b + c) + 2\mu b,$$
$$Z_z = \lambda(a + b + c) + 2\mu c,$$
$$X_y = X_z = Y_z = 0.$$

Die Spannungen X_x, Y_y, Z_z sind also Hauptspannungen, und sind constant; sie müssen also auch in der Oberfläche vorhanden sein, und durch sie sind also die Züge, welche an der Oberfläche wirken, bestimmt. Ist der Körper ein rechtwinkliches Parallelepiped, dessen Kanten mit x, y, z parallel gehen, so ist X_x der Zug, welcher in den zu x normalen Endflächen in jeder Flächeneinheit angebracht sein muss, um obige Verschiebungen hervorzubringen; ebenso hat man in den zu y und zu z normalen Endflächen die Züge Y_y und Z_z für jede Flächeneinheit anzubringen.

339. Ist gegeben

$$\xi = 0; \ \eta = a x z; \ \zeta = -a x y,$$

so werden

$$\frac{d\xi}{dx} = 0; \ \frac{d\eta}{dy} = 0; \ \frac{d\xi}{dz} = 0,$$

also die kubische Ausdehnung gleich Null. Dagegen

$$\frac{d\eta}{dx} = a z; \quad \frac{d\eta}{dz} = a x;$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = -a y; \quad \frac{d\zeta}{dy} = -a x,$$

und damit

$$X_x = Y_y = Z_z = 0,$$
$$X_y = \mu a z;\ X_z = -\mu a y;\ Y_z = 0.$$

Man hat also hier in den zu x normalen Flächen tangentiale Spannungen, welche in den zu x normalen Endflächen in gleicher Weise vorhanden sein müssen. Setzt man einen prismatischen Körper voraus, dessen Axe die x Axe ist, und ist dq ein Element dieser Endfläche, dessen Coordinaten y und z sind, so ist die Summe der parallel zu y auf diese Fläche wirkenden Kräfte

$$\mu a \int z\, dq$$

und ebenso die Summe der zu z parallelen Kräfte

$$-\mu a \int y\, dq.$$

Diese beiden Summen geben eine Resultirende, wenn nicht jede für sich gleich Null wird, was bedingt, dass die x Axe durch den Schwerpunkt der Endfläche geht. Ist diess nicht der Fall, so müsste die x Axe selbst eine Verschiebung erleiden, was der Annahme nach nicht der Fall sein soll.

Die beiden an dq wirkenden Kräfte setzen sich zu einer Resultirenden zusammen, welche normal auf der Verbindungslinie von dq mit der x Axe steht, und welche der Entfernung des dq von der x Axe proportional ist. Die ganze Endfläche muss von solchen um die x Axe drehenden Kräften angegriffen werden, deren statisches Moment in Beziehung auf die x Axe gleich

$$-a \int r^2 dq$$

ist, wo r die Entfernung des Elementes dq von der x Axe ist, und das Integral über die ganze Endfläche auszudehnen ist.

Bezeichnet man die Hauptspannungen in x, y, z mit A, B, C, so wird

$$A + B + C = X_x + Y_y + Z_z = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 2\mu^2 a^2 (y^2 + z^2) = 2\mu^2 a^2 r^2,$$

wenn man $y^2 + z^2 = r^2$ setzt.

Aus den Componenten von X ergibt sich, dass X in der zu

x und r rechtwinklichen Linie n liegt und gleich $-\mu a r$ ist, wenn man n in der Richtung y, z nimmt. In der Ebene normal zu r ist keine Spannung vorhanden. Bezeichnet man sie mit R, so müsste $R_x = X_r$ sein, diess ist aber gleich Null. Ebenso ist $R_y = Y_r = 0$, weil Y mit Y_x zusammenfällt und also die Richtung x hat; das gleiche gilt von $R_z = Z_r$, da Z die Richtung x hat. Es ist also auch die tangentiale Spannung in der zu r normalen Ebene gleich Null, oder diese Ebene ist eine der Ebenen der Hauptspannungen; ist diese gleich A, so ist $A = 0$, womit

$$B = -C \text{ und } B = \mu a r \text{ und } C = -\mu a r$$

wird.

Die Richtungen dieser Hauptspannungen findet man aus

$$X_B = B \cos(B, x) \text{ und } X_C = C \cos(C, x),$$

oder weil B und C in einer auf r normalen, also mit x parallelen Ebene liegen

$$\cos(C, x) = -\sin(B, x),$$

und $$X_B = X \sin(B, x); \; X_C = X \cos(B, x),$$

womit $$-\mu a r \sin(B, x) = \mu a r \cos(B, x),$$

oder $$\tan(B, x) = -1 \text{ oder } B, x = 135^0 \text{ und } C, x = 45^0$$

folgt. Die beiden Hauptspannungen sind also in Ebenen vorhanden, deren Normalen zu beiden Seiten von x mit diesem Winkel von 45^0 bilden, und welche durch r gehen.

340. Es seien die Verschiebungen in einem gebogenen Prisma für zwei Punkte

$$x, y, z \text{ und } -x, y, z,$$

$$\xi, \eta, \zeta \text{ und } -\xi, \eta, \zeta,$$

ferner für $$x, y, z \text{ und } x, -y, z,$$

$$\xi, \eta, \zeta \text{ und } \xi, -\eta, \zeta,$$

so folgt daraus zunächst, dass für $x = 0$ auch $\xi = 0$ sein müsse, und ebenso für $y = 0$ auch $\eta = 0$.

Es seien ferner die normalen Pressungen auf die zu y und zu z normalen Ebenen durchaus gleich Null. Diess gibt

$$Y_y = Z_z = \lambda \delta + 2\mu \frac{d\eta}{dy} = \lambda \delta + 2\mu \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

oder
$$\frac{d\eta}{dy}=\frac{d\zeta}{dz}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{d\xi}{dx}. \tag{a}$$

Daraus findet man
$$\delta=\frac{d\xi}{dx}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{d\xi}{dx}. \tag{b}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichgewichtsbedingungen unter der Voraussetzung, dass keine Kräfte auf die Masse des Prismas wirken, so werden diese
$$2\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}+\frac{d^2\xi}{dz^2}=0, \tag{c}$$
$$\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{d^2\xi}{dx\,dy}+\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\eta}{dz^2}=0, \tag{d}$$
$$\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{d^2\xi}{dx\,dz}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}=0. \tag{e}$$

Nimmt man nun an, die Biegung erfolge durch äussere Züge so, dass die Ausdehnung in der Richtung von x oder
$$\frac{d\xi}{dx}=\sigma+\tau z$$
sei, wo σ und τ von z und y unabhängig sein sollen, so erhält man
$$\xi=\int\sigma\,dx+z\int\tau\,dx,$$
wozu weil $\xi=0$ für $x=0$ keine Constante kommt, wenn beide Integrale von $x=0$ anfangen.

Setzt man den so bestimmten Werth von ξ in die Gleichung (c), so wird diese
$$\frac{d\sigma}{dx}+z\frac{d\tau}{dx}=0,$$
woraus, weil σ und τ von z unabhängig sind,
$$\sigma=a \text{ und } \tau=c,$$
beide Werthe constant, sich ergeben. Es ist also
$$\xi=ax+cxz. \tag{f}$$

Die Gleichung (a) gibt damit
$$\eta=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(a+cz)y, \tag{g}$$

wozu keine Constante kommt, weil $\eta = 0$ für $y = 0$. Beide Werthe von ξ und η entsprechen der Gleichung (d).

Dieselbe Gleichung gibt noch

$$\zeta = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(a z + \frac{c z^2}{2}\right) + \chi,$$

wo χ eine Function von x und y sein kann.

Substituirt man diesen Werth von ζ in die Gleichung (e), so wird diese

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} c + \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = 0;$$

ihr entspricht das allgemeine Integral

$$\chi = F_{x+iy} + f_{x-iy} - \frac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda+\mu)} c(x^2 + y^2),$$

wo F und f zwei willkührliche Functionen sind und $i = \sqrt{-1}$.

Sollen in den Oberflächen des als rechtwinklichen Parallelepipeds nun näher bestimmten Prismas keine tangentialen Spannungen vorkommen, so hat man, wenn diese Oberflächen bei $x = \pm l$; $y = \pm m$; $z = \pm n$ liegen,

$$X_y = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right); \quad X_z = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

und

$$Y_z = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)$$

gleich Null, das erste für $x = \pm l$ und für $y = \pm m$; das zweite für $x = \pm l$ und für $z = \pm n$; das dritte für $y = \pm m$ und $z = \pm n$.

Nun wird X_y allgemein gleich Null,

$$\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \text{ wird } c x + \frac{d\chi}{dx},$$

was unabhängig von z ist, und also für jedes z gleich Null werden muss. Substituirt man den für χ gefundenen Werth, so erhält man

$$\frac{dF_{x+iy}}{dx} + \frac{df_{x-iy}}{dx} - \frac{\lambda + 2\mu}{4(\lambda+\mu)} c x + c x = 0.$$

Daraus folgt

$$F_{x+iy} + f_{x-iy} + \frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} c x^2 + \psi_y = 0,$$

womit dann

$$\zeta = -\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} c x^2 - \psi_y - \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} c (x^2+y^2) - $$
$$- \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \left(a z + \frac{c z^2}{2}\right)$$

wird oder

$$\zeta = -\frac{1}{2} c x^2 - \psi_y - \frac{\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} c y^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \left(a z + \frac{c z^2}{2}\right).$$

Damit aber X_z auch Null werde für $x = \pm 1$, muss

$$\pm c l - c(\pm l) = 0$$

sein, was der Fall ist.

Für Y_z erhält man mit Weglassung des Factors μ

$$-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} c y - \frac{d\psi}{dy} - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)} c y$$

und diess soll Null werden für $y = \pm m$ und für $z = \pm n$. Setzt man

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} c y, \quad \text{oder}$$

$$\psi = -\frac{3\lambda+2\mu}{8(\lambda+\mu)} c y^2,$$

so erhält man

$$\zeta = -\frac{1}{2} c x^2 + \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)} c y^2 - \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)} (2 a z + c z^2)$$
$$= -\frac{1}{2} c x^2 + \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)} (c y^2 - 2 a z + c z^2).$$

Damit sind nun alle Verschiebungen bestimmt. Man sieht, dass die linearen Ausdehnungen nach den Richtungen x, y, z unabhängig sind von x und y; sie sind

$$\frac{d\xi}{dx} = a + c z; \quad \frac{d\eta}{dy} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (a + c z)$$

und

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (a + c z).$$

Die räumliche Ausdehnung wird

$$\delta = (a + cz)\left[1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right] = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(a + cz).$$

Es bleibt noch übrig die äusseren Züge zu bestimmen, welche dem Prisma die hier bestimmte Biegung gibt.

Zunächst sind

$$Y_y = Z_z = X_y = X_z = Y_z$$

für die Oberfläche gleich Null, was ebenso im innern stattfindet.

Es bleibt also nur noch

$$X_x = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}(a + cz) + 2\mu(a + cz)$$

$$= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}(a + cz) = E(a + cz),$$

wo E der Elasticitätsmodul ist. Das Prisma ist daher durch einen nach diesem Gesetze vertheilten Zug gespannt, oder wenn X_x negativ wird, gepresst. Es ist diess, wie man sieht, zugleich die Hauptspannung in jedem Punkte. Ihre grössten und kleinsten Werthe liegen bei den grössten und kleinsten Werthen von z. Ist c gleich Null, so hat man das gleichförmig in der Richtung c gespannte oder gepresste Prisma; ist dagegen a gleich Null, so hat man auf einer Seite der z Spannung und auf der andern Pressung.

Der ganze Zug in jeder der Endflächen ist, wenn z von dem Schwerpunkte aus gemessen wird

$$P = E \,.\, 2m\int_{-n}^{+n}(a + cz)\,dz = 4mnaE$$

woraus

$$a = \frac{P}{4mnE}.$$

Das Moment des Drucks für die Axe der y ist

$$M = E \,.\, 2m\int_{-n}^{+n}(a + cz)\,z\,dz = \frac{4mn^3}{3}cE,$$

woraus

$$c = \frac{3}{4}\,\frac{M}{mn^3E}.$$

Mit diesen beiden Ausdrücken wird

$$X_x = \frac{P}{4mn} + \frac{3Mz}{4mn^2} = \frac{1}{4mn}\left[P + \frac{3Mz}{n^2}\right].$$

341. Aufgabe. Ein hohler Cylinder, dessen innerer Halbmesser r_0, äusserer r_1 und dessen Länge l ist, ist einem Drucke von innen nach aussen $= p$ und einem äusseren $= p_1$ für jede Flächeneinheit ausgesetzt; die in der cylindrischen Hülle stattfindenden Spannungen zu bestimmen.

Der Druck auf jede der beiden Endflächen ist $(r_0{}^2 p - r_1{}^2 p_1)\pi$; dieser gibt in der cylindrischen Hülle eine der Axe des Cylinders parallele Spannung

$$\frac{r_0{}^2 p - r_1{}^2 p_1}{r_1{}^2 - r_0{}^2}.$$

Diese Spannung ist in jeder zur Axe des Cylinders normalen Ebene dieselbe, und ist normal auf dieser Ebene, eine Hauptspannung. Eine zweite Hauptspannung wird in einem Punkte der Hülle in der zu dem Radius durch diesen Punkt normalen Ebene stattfinden; sie heisse R; die dritte muss dann in der Ebene durch den Punkt und die Axe stattfinden; ihre Richtung steht rechtwinklich auf dem Radius r und der Axe des Cylinders; sie heisse S. S ist constant, wenn der Radius r derselbe bleibt, wie auch R sich nur mit r ändern kann.

Schneidet man aus der Hülle ein Volumelement durch zwei concentrische cylindrische Flächen mit den Radien r und $r + dr$, durch zwei Meridianebenen, welche den Winkel $d\varphi$ unter sich bilden, und endlich durch zwei zur Cylinderaxe normale Ebenen, die um dz von einander entfernt sind, so findet man die Summe der auf die Seiten dieses Volumelementes wirkenden Spannungen zerlegt nach r gleich

$$\left(r\frac{dR}{dr} + R - S\right) dr\, d\varphi\, dz,$$

und hat also fürs Gleichgewicht die Bedingung

$$r\frac{dR}{dr} + R - S = 0. \qquad \text{(a)}$$

Ist der ursprüngliche Radius r auf $r + \varrho$ verlängert, so ist die Ausdehnung in der Richtung von r gleich $\frac{d\varrho}{dr}$. Die Ausdehnung in der Richtung von S findet man, da aus $2r\pi$ nun $2(r+\varrho)\pi$ geworden

ist gleich $\frac{\varrho}{r}$. Die in der Richtung der Axe des Cylinders stattfindende constante Ausdehnung sei c. Damit wird

$$R = \lambda\delta + 2\mu\frac{d\varrho}{dr} = \lambda\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} + c\right) + 2\mu\frac{d\varrho}{dr},$$

$$S = \lambda\delta + 2\mu\frac{\varrho}{r}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen wird (a)

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} = 0.$$

Setzt man hier $\varrho = a r^\alpha$,

so erhält man die Bedingung

$$\alpha^2 = 1 \text{ oder } \alpha = \pm 1,$$

woraus sich das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung

$$\varrho = a r + \frac{b}{r}$$

ergibt, wo a und b Constanten sind.

Man erhält damit die Ausdehnungen

$$\frac{d\varrho}{dr} = a - \frac{b}{r^2}; \quad \frac{\varrho}{r} = a + \frac{b}{r^2}$$

und damit die räumliche Ausdehnung

$$\delta = 2a + c,$$

also constant für die ganze cylindrische Hülle.

Zur Bestimmung der Constanten hat man $R = -p_0$ für $r = r_0$ und $R = -p_1$ für $r = r_1$; endlich die Spannung in den Flächen normal zur Axe. Man hat damit

$$-p_0 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a - \frac{b}{r_0^2}\right),$$

$$-p_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a - \frac{b}{r_1^2}\right),$$

$$\frac{r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} = \lambda(2a + c) + 2\mu c.$$

Aus diesen findet man

$$b = \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{2\mu(r_1^2 - r_0^2)},$$

$$a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \text{ und } \delta = 3a.$$

Die Spannung S wird mit diesen Werthen

$$S = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

und hat also ihren grössten Werth an der innern Seite der Hülle für $r = r_0$. Dieser wird

$$S_0 = \frac{p_0 (r_0^2 + r_1^2) - 2 p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Nimmt man für S_0 die für das Material zulässige Spannung an, so erhält man hieraus

$$\frac{r_1}{r} = \sqrt{\frac{S_0 + p_0}{S_0 + 2p_1 - p_0}} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\frac{p_0 - p_1}{S_0 + p_0}}}.$$

Setzt man $r_1 = r(1 + \partial)$, so wird $r\partial$ die Dicke der Hülle, und wenn, was gewöhnlich der Fall ist, $\frac{p_0 - p_1}{S_0 + p_0}$ sehr klein gegen 1 ist,

$$\partial = \frac{p_0 - p_1}{S_0 + p_0},$$

woraus die erforderliche Dicke der Hülle sich bestimmt.

Für ein kugelförmiges Gefäss kann man einen ähnlichen Gang einschlagen; man findet dort

$$\partial = \frac{1}{2} \frac{p_0 - p_1}{S_0 + p_0}$$

unabhängig von den Radien.

342. Die Gleichungen des Gleichgewichtes (Nro. 337) geben, indem man die erste mit ξ, die zweite mit η, die dritte mit ζ multiplicirt, addirt, endlich mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt und über das ganze Volum des Körpers addirt, Glieder von der Form z. B.

$$\iiint \frac{dX_y}{dx} \xi \, dx\,dy\,dz.$$

Durch theilweise Integration erhält man hieraus

$$\iint (X_y{}'\xi' - X_y{}''\xi'')\,dx\,dz - \iiint X_y \frac{d\xi}{dy}\,dx\,dy\,dz.$$

Hier sind $X_y{}'$ und $X_y{}''$ die Werthe von X_y an den beiden Grenzen von x; $X_y\,dx\,dz$ ist die nach y gerichtete Componente des Drucks auf die Fläche $dx\,dz$. Ist dF'' das Element der Oberfläche des Körpers, dessen Projection auf die x, z Fläche das obige $dx\,dz$ ist; ist β'' der Winkel, welchen die Normale ausserhalb des Körpers mit der Richtung y bildet, beides beim Eintritte von y und ebenso dF' und β' für den Austritt des y aus dem Körper, so ist

$$dx\,dz = dF' \cos\beta' = -dF'' \cos\beta'',$$

und

$$X_y{}'\xi'\,dx\,dz - X_y{}''\xi''\,dx\,dz = X_y{}'\xi'\,dF' \cos\beta'' + X_y{}''\xi''\,dF'' \cos\beta'',$$

und das doppelte Integral oben geht über in

$$\int X_y \xi\,dF \cos\beta,$$

dieses Integral über die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnt. Verfährt man ebenso mit allen andern Gliedern, so erhält man für die mit ξ multiplicirten Doppelintegrale, das Integral

$$\int (X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma)\,\xi\,dF.$$

wo α, β, γ die Winkel der Normalen n des Elementes der Oberfläche mit den Axen x, y, z sind. Nun ist aber nach Nro. 274 a

$$X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma = N_x,$$

der Componenten der Spannung in der Oberfläche zerlegt nach x, und also das obige Integral

$$\int N_x \xi\,dF;$$

und für die oben angegebene Summe erhält man

$$\int (N_x \xi + N_y \eta + N_z \zeta)\,dF =$$

$$= \int \left[X_x \frac{d\xi}{dx} + Y_y \frac{d\eta}{dy} + Z_z \frac{d\zeta}{dz} + X_y \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) + \right.$$

$$\left. + X_z \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) + Y_z \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \right] dV,$$

wo das erste Integral über die ganze Oberfläche, das zweite über das ganze Volum V des Körpers auszudehnen ist und angenommen ist, es seien keine Kräfte f vorhanden, welche auf die Masse des Körpers wirken; sind solche vorhanden, so kommt zur linken Seite dieser Gleichung noch die Summe der Arbeiten aller an der Masse des Körpers thätigen Kräfte

$$\iiint \Delta (f_x \xi + f_y \eta + f_z \zeta)\, dV.$$

Das erste Integral ist die Summe der Arbeiten der äusseren Züge an der Oberfläche des Körpers für die eingetretene Verschiebung dieser Oberfläche. Das zweite Integral soll noch umgeformt werden.

Setzt man für $\frac{d\xi}{dx}$; $\frac{d\eta}{dy}$; $\frac{d\zeta}{dz}$; $\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$ etc. die Werthe aus Nro. 335 (63) und (64), so erhält man für den mit dV multiplicirten Ausdruck in dem zweiten Integrale

$$\frac{1}{2\mu}(X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2X_y^2 + 2X_z^2 + 2Y_z^2) -$$
$$-\frac{\lambda\delta}{2\mu}(X_x + Y_y + Z_z).$$

Es ist aber

$$X_x^2 + X_y^2 + X_z^2 = X^2;\ X_y^2 + Y_y^2 + Y_z^2 = Y^2;$$
$$X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2 = Z^2,$$

und
$$X_x + Y_y + Z_z = (3\lambda + 2\mu)\delta.$$

Daher der obige Ausdruck

$$\frac{1}{2\mu}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{\lambda(3\lambda + 2\mu)}{2\mu}\delta^2.$$

Die Summe der Quadrate der Spannungen in drei aufeinander rechtwinklichen Ebenen ist nach Nro. 276 e unabhängig von der Richtung der Coordinatenaxen; man kann also für X, Y, Z auch die Hauptspannungen in dem betreffenden Punkte nehmen. Sind dann ε_1, ε_2, ε_3 die Hauptausdehnungen, so ist

$$X = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_1;\ Y = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_2;\ Z = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_3,$$

was

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3\lambda^2\delta^2 + 4\mu\lambda\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 4\mu^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$
$$= \lambda(3\lambda + 4\mu)\delta^2 + 4\mu^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

gibt. Damit wird endlich die obige Gleichung

$$\int (N_x \xi + N_y \eta + N_z \zeta)\, dF = \int [\lambda \delta^2 + 2\mu(\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_3{}^2)]\, dV.$$

gibt. Der Ausdruck rechts ist die Arbeit der inneren Kräfte durch die erfolgten Ausdehnungen ausgedrückt. Man sieht aus dieser Gleichung, dass δ durchaus Null, das Volumen also ungeändert sein kann, und dass doch eine Arbeit der inneren Kräfte vorhanden sein kann, welche zu ihrer Hervorbringung eine Arbeit äusserer Kräfte verlangt. Diess ist zum Beispiel der Fall bei der Torsion (Nro. 339). Dort ist $\delta = 0$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} ar$ und $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} ar$; und es wird das Integral

$$\mu a^2 \int r^2 dV$$

$$= \mu a^2 Q,$$

wenn Q das Trägheitsmoment des Körpers für die x Axe ist, das Volumen für die Masse gesetzt. Ist das statische Moment der äusseren Kraft, welche diese Drehung hervorgebracht hat, für die x Axe gleich Pp; so ist die Arbeit dieser Kraft bei dieser Drehung

$$Ppal,$$

woraus man den Torsionswinkel a gleich

$$\frac{Ppl}{\mu Q}$$

findet.

343. Sind die auf die Oberfläche wirkenden Züge oder Drücke gegeben, so ist man meistens genöthigt, noch einige weitere Annahmen zu machen, über deren Zulässigkeit die Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den Erscheinungen an den diesen Kräften unterworfenen Körpern entscheiden muss. Es sei s_0 die eben gekrümmte Axe eines elastischen Körpers, von welcher vorausgesetzt ist, sie gehe durch die Schwerpunkte der zu ihr normalen Querschnitte des Körpers; auf diesen wirken nur Kräfte, welche in der Ebene durch s_0 gehen, welche also diese Axe nicht aus dieser Ebene verschieben.

Es seien x_0 und y_0 die Coordinaten eines Punktes dieser Axe in der Ebene durch s_0, ehe die äusseren Züge oder Drücke angebracht sind; x, y seien die Coordinaten desselben Punktes des

Körpers, nachdem diese angebracht, und der Körper sich gebogen hat. ϱ_0 und ϱ seien die Krümmungshalbmesser der Axenlinie an diesem Punkte vor und nach der eingetretenen Biegung. Ein Element, das um z normal von der Axe weg liegt, in der Richtung von ϱ_0 gemessen, habe vor der Biegung die Länge

$$d s'_0 = d s_0 \left(1 + \frac{z}{\varrho_0}\right),$$

wo also für z gleich Null $d s_0$ aus $d s'_0$ wird. Nach der Biegung wird dieses Element die Länge

$$d s' = d s \left(1 + \frac{z}{\varrho}\right)$$

haben, wo eine etwaige Aenderung von z vernachlässigt ist, und angenommen ist, die Querschnitte, welche vor der Biegung rechtwinklich auf $d s_0$ an dessen Enden stehen, seien auch noch nach der Biegung rechtwinklich auf d s.

Dann wird die Ausdehnung des Elementes $d s'$ sein

$$\frac{d s' - d s'_0}{d s'_0} = \frac{d s'}{d s'_0} - 1$$

$$= \frac{d s}{d s_0} \left[1 + z\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)\right] - 1$$

nahezu, wenn man ϱ_0 und ϱ als sehr gross gegen z annimmt, was in den Anwendungen immer der Fall sein wird.

Die Spannung, welche sich hieraus ergibt, ist

$$S_s = E\left[\frac{d s}{d s_0}\left(1 + z\left[\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right]\right) - 1\right], \qquad \text{(a)}$$

wo E der Elasticitätsmodul ist.

Sind P_s und P_z die Componenten der an der Oberfläche des Körpers angebrachten Züge nach s und z, vom Anfange des Körpers bis zu einem Querschnitte, welcher normal auf die Axe bei x, y durch diese gelegt wird; so müssen die in diesem Querschnitte anzubringenden Spannungen mit den Kräften P_x, P_z das durch den gedachten Querschnitt getrennte Stück des Körpers in der gebogenen Lage erhalten, Gleichgewicht hervorbringen. Ist M das statische Moment der Kräfte P_x, P_z in Beziehung auf eine durch x, y gehende Axe normal zur Ebene x, y, ist b die Breite

des Körpers bei x, y, z rechtwinklich auf die Ebene x, y; ist S_z die tangentiale Spannung in dem Punkte x, y, z in der Richtung von z; so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes des durch den betrachteten Querschnitt abgeschnittenen Stückes des Körpers

$$\int S_s\, b\, dz + P_s = 0, \tag{b}$$

$$\int S_z\, b\, dz + P_z = 0, \tag{c}$$

$$-\int S_s\, b\, z\, dz + M = 0, \tag{d}$$

wobei alle Integrale über den ganzen Querschnitt auszudehnen sind.

Die zweite dieser Gleichungen lehrt die Summe der tangentialen Spannungen in jedem Querschnitte kennen; sie ist gleich der negativen Summe der Componenten aller auf das abgeschnittene Stück wirksamen Kräfte in der Richtung von z.

Substituirt man den oben gefundenen Werth von S_s, wofür in Zukunft der Kürze wegen nur das Zeichen S gesetzt werden soll, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass die Ordinate z vom Schwerpunkte ausgeht

$$E q \left(\frac{ds}{ds_0} - 1\right) = -P_s, \tag{e}$$

wo q den Querschnitt des Körpers bei x, y rechtwinklich auf s bezeichnet.

In der Axe selbst wird die Spannung

$$S_0 = E\left(\frac{ds}{ds_0} - 1\right),$$

daher

$$S_0 = -\frac{P_s}{q}. \tag{f}$$

Setzt man nun

$$S = S_0 + S_1 \text{ wo } S_1 = E\frac{ds}{ds_0} z \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right), \tag{g}$$

so wird die Gleichung (d)

$$\int S_1\, b\, z\, dz = M,$$

oder

$$E\frac{ds}{ds_0}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\int b\, z^2\, dz = M. \tag{h}$$

Setzt man

$$\int b z^2 dz = q k^2,$$

welches das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung auf die durch x, y parallel b gehende Axe ist, so kann man obige Gleichung schreiben

$$S_1 q k^2 = M z. \tag{k}$$

Diese Gleichung lehrt S_1 kennen, worauf (g) die Gesammtnormalspannung bei x, y, z kennen lehrt. Damit sind diese Normalspannungen im ganzen Körper bekannt, wobei aber bei der Berechnung von M, P_s, P_z von den Aenderungen der Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte durch die Biegung abgesehen wird, was für die Anwendungen immer zulässig ist.

Bedenkt man, dass $\frac{ds}{ds_0}$ eine immer nur sehr wenig von 1 verschiedene Zahl ist, so kann man

$$E \text{ für } E\frac{ds}{ds_0}$$

setzen, und dann gibt die Gleichung (h)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E q k^2} + \frac{1}{\varrho_0}, \tag{l}$$

welcher Gleichung man sich zur Bestimmung der Form des gebogenen Körpers bedient.

Spannungen in einem rechteckigen, gleichförmig belasteten horizontalen Balken.

344. Ein Balken von rechteckigem Querschnitte liegt mit beiden Enden auf, so dass seine Längenaxe horizontal ist, und ist gleichförmig belastet; die Spannungen und Pressungen in ihm anzugeben.

Legt man durch die Längenaxe des Balkens eine verticale Ebene, so ist um diese alles symmetrisch. In dieser Ebene und in der Längenaxe nehmen wir die Axe der x, vertical abwärts die Axe der z, rechtwinklich auf beide die Axe der y, den Ursprung der Coordinaten in der Mitte der Axe.

Ist p die Belastung des Balkens auf die Längeneinheit der Axe

x, ist $2l$ die Entfernung der beiden Unterlager, so ist pl der Druck auf jedes dieser beiden Lager.

Damit wird X_x für $z=0$, was mit S_0 der vorhergehenden Nummer gleichbedeutend ist, gleich Null, weil keine Kraft in der Richtung x auf den Balken wirkt. In der Längenaxe x ist daher keine Normalspannung vorhanden.

Für den Punkt x, z wird das Moment der biegenden Kräfte

$$pl(l+x)-p\frac{(l+x)^2}{2}=\frac{p}{2}(l^2-x^2),$$

was nach der Gleichung (k) der vorhergehenden Nummer gleich

$$\frac{X_x q k^2}{z}$$

sein muss.

Man hat daher

$$X_x=\frac{p}{2qk^2}(l^2-x^2)z. \tag{a}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Normalspannung in den zu x normalen Ebenen am grössten ist für den grössten Werth von z, d. h. für die unterste Schichte des Balkens. Für $z=0$, die Längenaxe, wird sie Null, und in der obern Hälfte ist sie negativ, das heisst, dort findet Pressung statt, welche in der obersten Schichte denselben Werth hat, wie die Spannung in der untersten.

In den verschiedenen Querschnitten normal zu x erreicht die Spannung und Pressung die grössten Werthe für $x=0$, also für den mittleren Querschnitt; in den äussersten, für $x=\pm l$ ist die Spannung unabhängig von z gleich Null.

Versucht man mit diesem genäherten Werthe von X_x die andern Spannungen in dem Balken zu bestimmen, so ergeben die Gleichungen (53, Nro. 272), wenn man Y gleich Null setzt, mit $f=0$ fürs Gleichgewicht

$$-\frac{p}{qk^2}xz+\frac{dX_z}{dz}=0,$$

$$\frac{dX_z}{dx}+\frac{dZ_z}{dz}=0.$$

Die erste von diesen gibt

$$X_z = \frac{p}{2qk^2} x z^2 + C,$$

wo C eine Function von x sein kann. Da aber in der obern und in der untern Endfläche des Balkens, welche bei $z = \pm h$ sein mögen, keine tangentialen Spannungen von aussen angebracht sind, so muss für $z = \pm h$ die Spannung X_z unabhängig von x gleich Null werden; damit wird

$$X_z = -\frac{p}{2qk^2}(h^2 - z^2)x = Z_x. \qquad \text{(b)}$$

Dieser Werth von X_z muss der Gleichung (c) der vorhergehenden Nummer entsprechen, welche wird

$$-\frac{px}{2qk^2}\int b(h^2 - z^2)dz + px = 0.$$

Es wird aber das Integral $\frac{4bh^3}{3}$, während $qk^2 = \frac{2}{3}bh^3$ ist, wodurch diese Gleichung identisch wird.

Die zweite der obigen Gleichungen gibt nun

$$-\frac{p}{2qk^2}(h^2 - z^2) + \frac{dZ_z}{dz} = 0,$$

woraus

$$Z_z = \frac{p}{2qk^2}\left(h^2 z - \frac{z^3}{3}\right) + C.$$

Ist der Balken an der oberen Seite, d. h. für $z = -h$ belastet, so muss Z_z für $Z = -h$ gleich

$$-\frac{p}{b}$$

werden. Diess gibt, wenn man für qk^2 seinen Werth $\frac{2}{3}bh^3$ setzt, die Integrationsconstante

$$C = -\frac{p}{2b},$$

womit vollständig

$$Z_z = -\frac{p}{4bh^3}(2h^3 - 3h^2 z + z^3). \qquad \text{(c)}$$

Für die untere Seite des Balkens gibt diess $Z_z = 0$, wie das der Aufgabe zufolge sein soll.

Die Hauptspannungen findet man, wenn man die Richtung der einen gegen die x Axe mit φ bezeichnet, indem man zuerst die Normalspannung in der Ebene berechnet, deren Normale mit x den Winkel φ bildet. Man hat hierfür (Nro. 278)

$$N_n = X_x \cos\varphi^2 + Z_z \sin\varphi^2 + 2 X_z \cos\varphi \sin\varphi;$$

die ausgezeichneten Werthe hiervon liegen bei den aus der folgenden Gleichung sich ergebenden Werthe von φ,

$$0 = -(X_x - Z_z)\sin 2\varphi + 2 X_z \cos 2\varphi,$$

oder

$$\tan 2\varphi = \frac{X_x - Z_z}{2X_z} = -\frac{6(h^2 - z^2)x}{3(l^2 - x^2)z + 2h^3 - 3h^2 z + z^3},$$

Diese ausgezeichnete Werthe von N_n sind die Hauptspannungen; sie liegen in zwei Richtungen, welche um $\frac{\pi}{2}$ auseinander liegen in der Ebene x, z, da die dritte $Y = 0$ ist.

Für z gleich $\pm$ h wird

$$\tan 2\varphi = 0.$$

also $\varphi = 0$ und gleich $\frac{\pi}{2}$; in der obersten und in der untersten Schichte liegen die Hauptspannungen horizontal und vertical und fallen mit den oben bestimmten X_x und Z_z zusammen. Für $z = 0$, die sogenannte neutrale Faser, wird

$$\tan 2\varphi = -\frac{3x}{h},$$

was für ein sehr grosses x gegen h nahe

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\varphi}{2} \text{ gibt, also}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{3\pi}{4}.$$

Gegen das äussere Ende des Ballens hin liegen daher die Hauptspannungen in Punkten der Axe der x unter Winkeln von 45° und 135° nahe gegen diese Axe; sie werden

$$\mp \frac{p}{4b}\left(\frac{3x}{h} \pm 1\right).$$

Die Hauptspannung unter 45° gegen die x Axe ist negativ, eine

Pressung, wogegen die Hauptspannung unter 135° eine beinahe der ersten gleiche Spannung ist.

Versucht man nun aber mit diesen Spannungen die Verschiebungen zu bestimmen, so kommt man hier auf Widersprüche, welche zeigen, dass die in Nro. 343 gemachten Annahmen der Natur der Sache keineswegs vollständig entsprechen, und daher die Auflösungen nach ihnen nur als genäherte betrachtet werden dürfen.

Spannungen in einer elliptischen Feder.

345. Eine Feder von durchaus gleichem Querschnitte habe, ehe äussere Züge angebracht worden, in ihrer Mittellinie die Form einer Ellipse; sie werde nach der Richtung der einen Axe der Ellipse durch Kräfte, welche in dieser Axe liegen, auseinander gezogen. Die hieraus entstehenden Spannungen und Formänderungen dieser Feder zu bestimmen.

Die an der Feder wirkenden, einander entgegengesetzten Kräfte seien P; die Halbaxe der elliptischen Mittellinie in der Richtung von P sei vor der Ausdehnung a, die andere b.

Schneidet man die Feder zweimal normal auf die Mittellinie durch, so dass die Schnitte die Winkel φ und ψ mit der Axe der x bilden, den einen nach der Seite der positiven y, den andern nach der Seite der negativen y gemessen; bezeichnet man mit S_0 und S'_0 die Normalspannungen in der Mittellinie für diese beiden Querschnitte, und ebenso mit S_z und S_z' die tangentialen Spannungen, so wird fürs Gleichgewicht

$$S'_0\, q \sin\varphi - \cos\varphi \int S_z\, b\, dz + S'_0\, q \sin\psi - \cos\psi \int S'_z\, b\, dz - P = 0,$$

$$S_0\, q \cos\varphi + \sin\varphi \int S_z\, b\, dz + S'_0\, q \cos\psi - \sin\psi \int S'_z\, b\, dx = 0.$$

Da aber S_0 und S_z nur von dem Winkel φ und S'_0 und S'_z nur von ψ abhängen können, so muss

$$S'_0\, q \sin\varphi - \cos\varphi \int S_z\, b\, dz = \frac{P}{2},$$

$$S_0\, q \cos\varphi + \sin\varphi \int S'_z\, b\, dz = c$$

sein, wo c eine Constante ist. Damit erhält man

$$S'_0\,q = \frac{P}{2}\sin\varphi + c\cos\varphi\,,$$

$$\int S_z\,b\,d\,z = c\sin\varphi - \frac{P}{2}\cos\varphi\,.$$

Nun muss für φ und $\pi - \varphi$ die Spannung dieselbe sein. Daher $c = 0$ und

$$S_0\,q = \frac{P}{2}\sin\varphi\,;\ \int S_z\,b\,d\,z = -\frac{P}{2}\cos\varphi\,. \qquad \text{(a)}$$

Die Spannung S_0 in der Mittellinie ist daher immer von gleichem Zeichen mit P, während die Summe der tangentialen Spannungen in der Häfte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von da bis π das Zeichen wechselt; für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist diese Summe gleich Null.

Die Momentengleichung gibt

$$\frac{S_1\,q\,k^2}{z} - \frac{S'_1\,q\,k^2}{z'} - S'_0\,q\left[(y-y')\sin\psi + (x-x')\cos\psi\right] +$$
$$+ \int S'_z\,b\,d\,z\left[(y-y')\cos\psi - (x-x')\sin\psi\right] + P\,y = 0,$$

oder

$$\frac{S_1\,q\,k^2}{z} - \frac{S'_1\,q\,k^2}{z'} = \frac{P}{2}(y-y') - P\,y = -\frac{P}{2}(y-y').$$

Da aber S_1 nur von y und S'_1 nur von y' und zwar ebenso von — y' wie S_1 von y abhängt, so muss sein

$$\frac{S_1\,q\,k^2}{z} = C - \frac{P}{2}\,y,$$

wo C eine Constante ist.

Um diese Constante zu bestimmen, dient die Gleichung (g), woraus

$$E\,q\,k^2\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right] = C - \frac{P}{2}\,y\,.$$

Schreibt man

$$\frac{d\varphi}{d\,s}\ \text{für}\ \frac{1}{\varrho}\ \text{und}\ \frac{d\varphi_0}{d\,s_0} = \frac{1}{\varrho_0}\,,$$

so wird diese Gleichung

$$E\,q\,k^2\left[d\varphi - d\varphi_0\frac{d\,s}{d\,s_0}\right] = C\,d\,s - \frac{P}{2}\,y\,d\,s\,.$$

Setzt man aus (a) in dieser und der vorhergehenden Nummer

$$\frac{ds}{ds_0} = 1 + \frac{S_0}{E} = 1 + \frac{P}{2qE}\sin\varphi,$$

so wird

$$Eqk^2(d\varphi - d\varphi_0) - \frac{P}{2}k^2\sin\varphi\, d\varphi_0 = C\,ds - \frac{P}{2}y\,ds.$$

Da nun φ von φ_0 nur um sehr wenig verschieden sein kann, so wird man annähernd $\sin\varphi_0\, d\varphi_0$ für $\sin\varphi\, d\varphi_0$ setzen, woraus für die halbe Feder sich ergibt

$$Pk^2 = Cs - \frac{P}{2}\int y\,ds,$$

wo s die Länge der Mittellinie der halben Feder ist.

Für die Berechnung von s vernachlässigt man die Formänderung. Setzt man

$$x = a\sin\chi \text{ und } y = b\cos\chi,$$

so wird

$$s = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2\sin\chi^2}\,d\chi = 2aE_{e,\frac{\pi}{2}}$$

wo

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

ist und $E_{e,\chi}$ das bekannte zweite elliptische Integral ist. Ferner ist

$$\int_0^s y\,ds = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\chi\sqrt{1 - e^2\sin\chi^2}\,d\chi,$$

was sich mit $e\sin\chi = w$ auf ein bekanntes Integral reducirt; es ist

$$\int_0^s y\,ds = \frac{ab}{e}\arcsin e + ab\sqrt{1-e^2}.$$

Daraus erhält man endlich

$$C = \frac{P}{4E_{e,\frac{\pi}{2}}}\left[b\left(\sqrt{1-e^2} + \frac{1}{e}\arcsin e\right) - \frac{2k^2}{a}\right].$$

Für ein Kettenglied aus Rundeisen vom Durchmesser ∂ findet man mit

$$a = 1{,}8\partial;\ b = 1{,}25\partial \text{ zunächst } e^2 = 0{,}5178 \text{ und}$$
$$e = 0{,}7196.$$

Damit wird $E_{e,\frac{\pi}{2}} = 1{,}3421\,, \quad C = 0{,}4086\,P\,\partial$

und $$\frac{S'_1\,q\,k^2}{z} = \left(0{,}4086\,\partial - \frac{y}{2}\right)P.$$

Daraus ergibt sich die normale Spannung

$$S = S_0 + S_1 = \frac{P}{2q}\sin\varphi + \frac{\left(0{,}4086\,\partial - \frac{y}{2}\right)Pz}{q\,k^2}.$$

Im Scheitel erhält man für $z = \frac{\partial}{2}$

$$S = 3{,}27\,\frac{P}{q}$$

und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ also $y = \frac{1{,}25\,\partial}{2}$ und $z = -\frac{\partial}{2}$

$$S = \frac{P}{2q} + 1{,}73\,\frac{P}{q} = 2{,}23\,\frac{P}{q}.$$

Die grösste normale Spannung kommt daher in der äussersten Faser in der Axe a vor, und das Material muss stark genug sein, diese Spannung zu ertragen.

Die Verlängerung der Mittellinie ergibt sich aus

$$ds = ds_0\left(1 + \frac{P}{2qE}\sin\varphi\right).$$

Setzt man hier wieder φ_0 für φ, so wird $ds_0 \sin\varphi = dx$ und

$$s - s_0 = \frac{Pa}{2qE},$$

wenn s und s_0 die Längen des vierten Theils der Ellipse sind.

Bewegung eines elastischen Körpers.

346. Die Bewegungsgleichungen für einen isotropen Körper werden (Nro. 336)

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{d\delta}{dx} + \mu\left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right] + \Delta f_x &= \Delta\frac{d^2\xi}{dt^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{d\delta}{dy} + \mu\left[\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right] + \Delta f_y &= \Delta\frac{d^2\eta}{dt^2}, \qquad (66)\\
(\lambda+\mu)\frac{d\delta}{dz} + \mu\left[\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right] + \Delta f_z &= \Delta\frac{d^2\zeta}{dt^2}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist
$$\delta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dx},$$
die Verdichtung an der Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, welche ursprünglich bei x, y, z lag. Die Verschiebungen sind alle als sehr klein angenommen.

347. Wir untersuchen, ob in einem solchen Mittel eine einfache, ebene Wellenbewegung möglich ist. Dabei nehmen wir an, die äusseren Kräfte auf die Massentheile f seien Null, und setzen
$$\begin{aligned} \xi &= w\alpha \sin(at+s), \\ \eta &= w\beta \sin(at+s), \\ \zeta &= w\gamma \sin(at+s), \end{aligned} \tag{a}$$
wo w, α, β, γ und a Constanten sind, und
$$s = mx + ny + pz \tag{b}$$
ist, worin wieder m, n, p constant sein sollen, wodurch also bestimmt ist, dass der Bewegungszustand in allen Punkten der durch die Gleichung (b) gegebenen Ebene zu gleicher Zeit derselbe sei. Dabei schreiben wir noch
$$m^2 + n^2 + p^2 = l^2. \tag{c}$$
Substituirt man diese Werthe von ξ, η, ζ in die Bewegungsgleichungen, so erhält man
$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)\, m(\alpha m + \beta n + \gamma p) + \alpha(\mu l^2 - \Delta a^2) &= 0, \\ (\lambda+\mu)\, n(\alpha m + \beta n + \gamma p) + \beta(\mu l^2 - \Delta a^2) &= 0, \\ (\lambda+\mu)\, p(\alpha m + \beta n + \gamma p) + \gamma(\mu l^2 - \Delta a^2) &= 0. \end{aligned}$$
Eliminirt man γ aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen, und ebenso aus der zweiten und dritten, so erhält man
$$(\mu l^2 - \Delta a^2)(\alpha n - \beta m) = 0,$$
und
$$(\mu l^2 - \Delta a^2)[\alpha(\lambda+\mu)\, mn + \beta((\lambda+\mu)(n^2+p^2) + \\ + \mu l^2 - \Delta a^2)] = 0.$$
Beiden Gleichungen wird entsprochen durch
$$\mu l^2 - \Delta a^2 = 0, \tag{d}$$
oder durch
$$\alpha n - \beta m = 0, \tag{e}$$
wozu die zweite dieser Gleichungen die weitere Bedingung gibt
$$\beta m^2(\lambda+\mu) + \beta[(\lambda+\mu)(l^2 - m^2) + \mu l^2 \Delta a^2] = 0,$$
oder
$$(\lambda + 2\mu) l^2 - \Delta a^2 = 0. \tag{f}$$

348. Man erhält also zwei Auflösungen, von welchen jede eine mögliche Bewegung der durch die Gleichungen (a) gegebenen Art gibt. Für die erste ist

$$a^2 = \frac{\mu l^2}{\Delta},$$

und dabei muss $\alpha m + \beta n + \gamma p = 0$

werden, welches die Bedingung ist, dass δ, die Verdichtung hierbei, Null werde. Diese Wellenbewegung ist daher von keiner Verdichtung begleitet.

Derselbe Zustand der Bewegung wiederholt sich zu gleicher Zeit für s' und s, für welche

$$s' - s = 2\pi$$

ist. Diese Ebenen sind parallel und ihre Entfernung ist

$$\frac{s' - s}{l} = \frac{2\pi}{l} = \lambda,$$

welches die Wellenlänge dieser Bewegung ist.

In derselben Ebene s wiederholt sich derselbe Zustand der Bewegung, so oft a t um 2π wächst, das heisst für die Zeit

$$\tau = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}.$$

Diese Zeit ist die Oscillationsdauer der Wellenbewegung.

Die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Wellen ist

$$\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{\Delta}}. \qquad (g)$$

Die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ erhält man

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha a \cos(at + s); \quad \frac{d\eta}{dt} = \beta a \cos(at + s);$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma a \cos(at + s). \qquad (h)$$

Vergleicht man diese mit der Bedingung, dass

$$\alpha m + \beta n + \gamma p = 0$$

sein muss, und mit der Gleichung der Wellenebene

$$s = mx + ny + pz,$$

so sieht man, dass die Schwingungsrichtung der Wellenebene pa-

rallel geht, also normal zu der Richtung, nach welcher die Wellenbewegung fortschreitet, die Schwingungen sind transversale.

349. Die zweite Auflösung gibt

$$\frac{a^2}{l^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\Delta}$$

als das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher diese zweite Wellenbewegung fortschreitet. Die Gleichungen (h) geben mit der Bedingung (e), welche für diese Bewegung erfüllt sein muss, welche in die drei zu erfüllenden Bedingungsgleichungen substituirt noch die andern geben

$$\gamma n - \beta p = 0,$$

die Schwingungsrichtung normal auf die Wellenebene; die Schwingungen geschehen in der Richtung, in welcher die Welle fortschreitet, sie sind longitudinale.

350. Man sieht, dass für die transversalen wie für die longitudinalen Schwingungen die beiden verschiedenen Fortschreitungsgeschwindigkeiten der Wellen unabhängig sind von der Oscillationsdauer und von der Amplitude. Jede anfängliche Erschütterung wird sich darstellen lassen, als entstanden aus dem Zusammentreffen solcher ebenen Wellen, von welchen die einen, die longitudinalen von Verdichtungen begleitet sind, während die andern, die transversalen, keine solche geben. Aus dieser anfänglichen Erschütterung werden dann für jeden Erschütterungspunkt zwei kreisförmige Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreiten (Nro. 326), von welchen die eine den longitudinalen, die andere den transversalen Schwingungen angehört. Die Bewegung an jedem Punkte wird sich betrachten lassen als die durch das Zusammentreffen, die Interferenz, aller dieser Wellen in jenem Punkte als Resultirende sich ergebende Bewegung.

351. Mit einem verticalen cylindrischen Drahte, der oben fest eingespannt ist, ist unten die schwere Masse m zu einem festen Körper verbunden. Diese Masse wird mit dem untern Ende des Drahtes um die vertical bleibende Axe des Drahtes gedreht, und dann das Ganze sich selbst überlassen. Die hierbei eintretende Bewegung zu bestimmen.

Sind x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes des Drahtes in der Ruhelage, z von der Befestigungsebene in der Axe vertical abwärts gemessen; so kann man die Verschiebungen dieses Punktes zur Zeit t gleich setzen mit

$$\xi = -ayz;\ \eta = +axz;\ \zeta = bz. \qquad \text{(a)}$$

Dabei wird b constant sein können, a aber eine Function von t und von z sein. Die räumliche Ausdehnung an dieser Stelle findet man

$$\delta = b$$

also constant. Damit reduciren sich die Bewegungsgleichungen, wenn die auf den Draht wirkende Schwerkraft ausser Acht gelassen wird, auf

$$\mu \frac{d^2(az)}{dz^2} = \Delta \frac{d^2(az)}{dt^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$az = F_{z+vt} + f_{z-vt},$$

wo F und f zwei willkührliche Functionen sind und $v^2 = \frac{\mu}{\Delta}$ ist.

Für $z = 0$ muss az unabhängig von der Zeit Null bleiben, woraus

$$F_{vt} = -f_{-vt},$$

und also für $t = t - \frac{z}{v}$

$$F_{vt-z} = -f_{z-vt}$$

oder

$$az = F_{vt+z} - F_{vt-z} \qquad \text{(b)}$$

wird.

Aus den Werthen von ξ und η sieht man, dass az der Winkel ist, um welche der bei z liegende Querschnitt des Drahtes gegen seine Ruhelage verdreht ist. Der Torsionswinkel bei z, das heisst der Winkel, um welchen zwei um die Längeneinheit vertical unter einander liegende Querschnitte gegen einander verdreht liegen würden, wenn die Verdrehung auf diese Strecke dieselbe wäre, welche sie bei z ist, ist

$$\frac{d(az)}{dz}.$$

Ist der Werth dieses Torsionswinkels gleich ϑ für das untere Ende des Drathes, das bei $z = l$ liegen soll, so ist zur Erhaltung dieses Torsionswinkels im Gleichgewichte das statische Moment $\mu Q \vartheta$ erforderlich, worin Q das Trägheitsmoment des Querschnittes des Drahtes normal auf z ist (Nro. 342). Umgekehrt wird bei dem Torsionswinkel ϑ das statische Moment $\mu Q \vartheta$ den Draht in seine Ruhelage zurückzuführen suchen. Für die am untern Ende des Drahtes befestigte Masse m ergibt sich hieraus die Bewegungsgleichung

$$\mu Q \frac{d(az)}{dz} = Q_1 \frac{d^2(az)}{dt^2}, \qquad (c)$$

wenn Q_1 das Trägheitsmoment der Masse m für die Axe z ist, und l für z gesetzt wird (Nro. 161, Gleichung 29).

Versucht man

$$F_{vt} = A \sin n v{\cdot}t$$

zu setzen, so wird

$$az = 2A \cos nvt \sin nz \qquad (d)$$

und also

$$\frac{d(az)}{dz} = 2An \cos nvt \cos nz; \quad \frac{d^2(az)}{dt^2} = -2An^2v^2 \cos nvt \sin nz.$$

Substituirt man diese Werthe mit $z = l$ in die Gleichung (c), so gibt diese die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mu Q}{Q_1} = nv^2 \tan nl, \qquad (e)$$

aus welcher man n mit dem früher bestimmten Werthe von v^2 erhält. Ist Q_1 sehr gross gegen μQ, so wird, weil auch v^2 immer sehr gross ist, n sehr klein, so dass man nl für tan nl setzen kann. Damit wird der Winkel φ, um welchen das untere Ende des Drahtes gegen die Ruhelage zur Zeit t verdreht ist, und also auch die auf diesem Ende festsitzende Masse m

$$\varphi = al = 2Anl \cos nvt. \qquad (f)$$

Die Dauer einer ganzen Oscillation wird hieraus

$$\tau = \frac{2\pi}{nv} = 2\pi \sqrt{\frac{Q_1 l}{\mu Q}}. \qquad (g)$$

Wird μ durch das Gewicht einer schweren Masse μ_1 angegeben, so ist $\mu = \mu_1 g$, wo g die Beschleunigung der Schwere ist.

352. Ist keine Masse am untern Ende des Drahtes befestigt, also m und damit Q_1 gleich Null, so muss für $z = l$

$$\frac{d(az)}{dz} = 0$$

sein. Setzt man hier wieder

$$F_{vt} = A \sin n v t,$$

und also
$$az = 2A \cos n v t \sin n z,$$

so wird die Bedingungsgleichung (c)

$$\mu Q \cos n l = 0$$

und dazu
$$n l = \frac{2\mathfrak{a}+1}{2}\pi,$$

wo $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl ist.

Hier wird $az = 0$ unabhängig von t für

$$z = \frac{2\mathfrak{b}}{2\mathfrak{a}+1} l,$$

wo wieder $\mathfrak{b}$ eine ganze Zahl vorstellt, also für $z = 0$, was für jeden Werth von $\mathfrak{a}$ der Fall ist. Ist $\mathfrak{a} = 0$, so findet $a = 0$ für keinen andern Werth von z statt; ist

$\mathfrak{a} = 1$, so wird a gleich Null für $z = \frac{2}{3} l$;

$\mathfrak{a} = 2$, so wird a gleich Null für $z = \frac{2}{5} l$ und für $z = \frac{4}{5} l$;

und so weiter; diese Entfernungen geben die Schwingungsknoten für diese drehende Bewegnng an.

Die Dauer einer ganzen Oscillation ist

$$\tau = \frac{4l}{(2\mathfrak{a}+1)v} = \frac{4l}{(2\mathfrak{a}+1)} \sqrt{\frac{\Delta}{\mu}}.$$

Die Zahl der Oscillationen in der Zeiteinheit ist für

$\mathfrak{a} = 0$ gleich $\frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\mu}{\Delta}}$;

$\mathfrak{a} = 1$ gleich $\frac{3}{4l}\sqrt{\frac{\mu}{\Delta}}$ und so fort.